



Titre: Étude du décollement mobile dans les écoulements tourbillonnaires
Title:

Auteur: Philippe Miron
Author:

Date: 2016

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Miron, P. (2016). Étude du décollement mobile dans les écoulements
Citation: tourbillonnaires [Ph.D. thesis, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie.
<https://publications.polymtl.ca/2101/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2101/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Jérôme Vétel, & André Garon
Advisors:

Programme: Génie Mécanique
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT MOBILE DANS LES ÉCOULEMENTS
TOURBILLONNAIRES

PHILIPPE MIRON
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR
(GÉNIE MÉCANIQUE)
AVRIL 2016

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

ÉTUDE DU DÉCOLLEMENT MOBILE DANS LES ÉCOULEMENTS
TOURBILLONNAIRES

présentée par : MIRON Philippe

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury constitué de :

M. TRÉPANIÉ Jean-Yves, Ph. D., président

M. VÉTEL Jérôme, Doctorat, membre et directeur de recherche

M. GARON André, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. ÉTIENNE Stéphane, Doctorat, membre

M. LEMAY Jean, Ph. D., membre externe

DÉDICACE

À Rita Sauvé (1931-2014) et Gilles Miron (1930-2014),

REMERCIEMENTS

Je tiens d'emblée à remercier monsieur Jérôme Vétel, qui a su me diriger durant ces dernières années tout en me laissant une grande liberté. J'aimerais aussi le remercier pour sa grande patience et ses nombreux conseils (*c.-à-d.* critiques et commentaires), surtout durant la phase de rédaction. J'ai particulièrement apprécié notre collaboration, qui a permis de me développer en tant que chercheur et personne, et j'espère qu'elle se poursuivra dans l'avenir. Je me dois aussi finalement de le remercier pour son soutien financier.

Je veux également remercier monsieur André Garon, qui m'a accueilli au laboratoire il y a maintenant 7 ans pour un stage d'été. Cette première expérience de recherche m'a permis de découvrir un tout nouveau monde, et m'a motivé à poursuivre dans ce chemin. Merci d'avoir toujours été disponible, même lorsque j'entraais dans ton bureau à 18h pour une question qui nécessitait une heure d'explication ! Je me souviendrai toujours des *minutes éducatives* qu'André prenait un plaisir fou à nous raconter.

De très sincères remerciements aux membres du jury : monsieur Jean-Yves Trépanier, monsieur Jean Lemay et monsieur Stéphane Étienne, qui ont tous accepté sans hésitation d'évaluer mes travaux. Vos commentaires avant et après la soutenance ont permis d'améliorer ma thèse et ont entraîné plusieurs discussions intéressantes.

Un remerciement spécial à tout le personnel de Polytechnique (plombiers, électriciens, mécaniciens, techniciens informatiques, secrétaires, etc.) qui donne de leur temps pour nous aider à faire avancer nos travaux. De plus, un remerciement aux employés d'Aramark qui nous accueillent tous les jours avec le sourire, et qui préparent les meilleurs scones en ville.

Je tiens aussi à remercier tous les membres de ma famille, qui me soutiennent et m'encouragent depuis plusieurs années. À tous les soupers de famille, vos questions me poussent à vulgariser mes travaux. Pour tous les chercheurs, ceci est sans aucun doute une des tâches les plus importantes et aussi les plus complexes.

À mes collègues, je me souviendrai toujours de ces années passées au labo, sans fenêtre, où le temps semble parfois s'arrêter. Grâce à vous, et à l'équipe que nous formions, l'ascension quotidienne du Mont-Royal paraissait moins pénible. Un remerciement à Marc-Étienne Lamarche-Gagnon, avec qui j'ai passé la majorité du temps lors des dernières années. Merci pour ton soutien, ton aide, ton encouragement (au laboratoire comme au gym !) et simplement pour la personne que tu es.

Manuréva (mon poulet), merci de toujours croire en moi. Tes encouragements, ta patience

et ton soutien sont responsables d'une grande partie de mes accomplissements. Toutes ces années à mes côtés devraient te permettre l'obtention d'un doctorat honorifique.

Finalement, un dernier remerciement à Cosette, qui malgré son petit caractère, rend la vie moins monotone (et moins silencieuse).

RÉSUMÉ

Une couche limite est dite décollée quand les lignes fluides, initialement longeant une paroi solide, s'en détachent brutalement. Sur une aile d'avion, cela provoque une diminution de la portance et une augmentation de la traînée. Les mêmes effets sur une aube de compresseur engendrent une baisse de performance. Puisque le rendement optimal des systèmes utilisant la circulation d'un fluide est souvent proche des conditions qui mènent au décollement, il est impératif de pouvoir le prédire pour développer des stratégies de contrôle.

Depuis les travaux pionniers de Prandtl qui a été le premier à introduire le concept de couche limite, un critère universel de prédiction du décollement, c'est-à-dire applicable à tous les écoulements quelles que soient leurs conditions, n'a toujours pas été élaboré. De nombreuses théories ont vu le jour, mais elles s'appliquent toujours avec des hypothèses restrictives sur l'écoulement (nécessité d'utiliser les équations de couches limites, valide uniquement en incompressible, etc.). Bien qu'historiquement le décollement ait été décrit en lagrangien en observant simplement le détachement du fluide d'une paroi, ce sont plutôt des critères eulériens qui le plus souvent sont évoqués pour quantifier le décollement dans la littérature scientifique. Cette première approche lagrangienne a néanmoins été reprise il y a seulement une dizaine d'années et a permis de voir le phénomène sous un jour nouveau, ce qui a abouti à une nouvelle théorie, unifiant par ailleurs des résultats indépendants en apparence contradictoires obtenus sur des écoulements différents. Il semble cependant que cette nouvelle théorie ne soit pas encore complète.

L'objectif de ce travail est de mettre en évidence certaines caractéristiques du décollement qui ne sont pas prises en compte dans les développements théoriques récents en l'étudiant sur une variété de cas allant des plus simples, comme dans les écoulements visqueux, aux plus complexes, comme dans les écoulements tourbillonnaires. Des approches analytiques et numériques sont proposées pour détecter le décollement, et sont ensuite appliquées à des champs de vitesse analytiques, numériques (méthode des éléments finis) et expérimentaux (vélocimétrie par image de particules). Bien qu'une nouvelle théorie ne soit pas proposée, nous montrons que les approches lagrangiennes issues des systèmes dynamiques sont définitivement pertinentes puisqu'elles ne travaillent qu'avec la cinématique des fluides, ce qui les rend indépendantes du régime de l'écoulement, de sa compressibilité ou encore du référentiel choisi.

ABSTRACT

A boundary layer separation occurs when the fluid trajectories, initially parallel to a solid wall, detach abruptly from the wall. On an aircraft wing, this causes an important decrease in lift and an increase in drag. The same effects on a compressor blade reduce the efficiency of the engine. Since the optimal performance of engineering systems using circulating fluids is often close to the conditions that lead to flow separation, it is critical to be able to predict the phenomenon in order to develop control strategies.

Since the pioneering work of Prandtl who was the first to introduce the boundary layer concept, a universal criterion for predicting the separation, applicable to all flows regardless of their characteristics, has yet to be developed. Many theories have emerged, but most of the time, they only apply to specific flow types (described with boundary layer equations, under compressible or incompressible assumptions, considered stationary or bidimensional, etc.). Although historically the separation has been described with Lagrangian methods by simply observing the detachment of fluid particles from a wall, most of the time, Eulerian methods are used to quantify the separation in the scientific literature.

The Lagrangian approach has been reintroduced about ten years ago and has led to completely new and innovative descriptions of flow separation. This recent theory results in the unification of apparently contradictory results obtained on different flows. However it seems that this theory is not yet complete.

The objective of this work is to highlight certain features of flow separation that are not included in the recent theoretical developments using different test cases ranging from simple viscous flows to more complex turbulent flows. Analytical and numerical approaches are proposed to detect the separation, and are then applied to analytical, numerical (finite element method) and experimental (particle image velocimetry measurements) velocity fields. Although a new theory is not developed, we show that Lagrangian approaches from dynamic systems are definitely relevant because they are obtained directly from the kinematics of fluids, making them objective and independent of the flow regime, compressibility and the frame of reference.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
RÉSUMÉ	vi
ABSTRACT	vii
TABLE DES MATIÈRES	viii
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES FIGURES	xii
LISTE DES ANNEXES	xv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xvi
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Objectifs de la thèse	4
1.2 Organisation de la thèse	4
CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE SUR LE DÉCOLLEMENT DES COUCHES LIMITES	5
2.1 Méthodes eulériennes	5
2.1.1 Singularité des équations de couche limite	5
2.1.2 Méthodes des points critiques – Identification de l’angle du décollement	9
2.1.3 Application aux écoulements instationnaires	14
2.2 Méthodes lagrangiennes	17
2.2.1 Équation de la couche limite dans un repère lagrangien	17

2.2.2	Équation explicite du profil de décollement	21
2.3	Choix des bases de données	24
2.3.1	Description de l'écoulement d'un jet impactant	24
2.3.2	Cas d'études	27
CHAPITRE 3	APPROCHE EXPÉRIMENTALE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES	28
3.1	Montage expérimental et mesures associées	28
3.1.1	Description du montage	28
3.1.2	Vélocimétrie par image de particules (PIV)	33
3.1.3	Résultats préliminaires	45
3.2	Simulations numériques	61
3.2.1	Forme faible de l'équation de Navier-Stokes	62
3.2.2	Discretisation des équations	63
3.2.3	Discretisation du terme temporel	69
3.2.4	Résolution du système d'équations	72
CHAPITRE 4	MÉTHODE DE DÉTECTION DU DÉCOLLEMENT MOBILE . . .	74
4.1	Décollement fixe	75
4.2	Décollement mobile	76
4.3	Détection du décollement	78
4.3.1	Contexte théorique	78
4.3.2	Exposant de Lyapunov (FTLE)	83
4.3.3	Structures lagrangiennes cohérentes	84
4.3.4	Méthode d'extraction des points selles	85
4.4	Illustration de la méthode	87
CHAPITRE 5	APPLICATION SUR DES CHAMPS DE VITESSE NUMÉRIQUES	90
5.1	Écoulement autour d'un cylindre en rotation	90
5.1.1	Détection des points selles lagrangiens	92
5.1.2	Décollement mobile près du cylindre	92

5.2	Écoulement autour du cylindre fixe	95
5.2.1	Décollement formé par le détachement tourbillonnaire	96
5.2.2	Phénomène de décollement derrière le cylindre à $Re = 350$	99
5.3	Bilan des résultats sur l'écoulement autour du cylindre	105
5.4	Écoulement du jet impactant	105
CHAPITRE 6 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX		112
6.1	Écoulement du jet impactant	112
6.2	Dynamique d'un anneau tourbillonnaire	115
CHAPITRE 7 CONCLUSION		122
7.1	Synthèse des travaux	122
7.2	Limitations et améliorations futures	124
RÉFÉRENCES		126
ANNEXES		132

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3.1	Caractéristiques principales des deux types de particules utilisées . . .	35
Tableau 3.2	Polynômes de Legendre pour les degrés inférieurs à 10	66
Tableau 3.3	Coefficients des méthodes de différenciation arrière en fonction de l'ordre	69
Tableau 6.1	Paramètres de l'écoulement du jet impacté	112
Tableau 6.2	Résumé des différentes configurations d'anneau tourbillonnaire présen- tées dans la littérature	116
Tableau 6.3	Paramètres de l'écoulement de l'anneau tourbillonnaire	117
Tableau A.1	Échelles caractéristiques des variables intervenant dans l'équation de Navier–Stokes	132

LISTE DES FIGURES

Figure 2.1	Profils de vitesse de la couche limite près d'une paroi	6
Figure 2.2	Identification du type de point critique en fonction de p et q	10
Figure 2.3	Analyse du point critique en fonction du ratio η_x/ξ_y	13
Figure 2.4	Lignes de courant de trois écoulements en fonction du mouvement de la paroi	15
Figure 2.5	Profils de vitesse en fonction du mouvement de la paroi	16
Figure 2.6	Représentation d'une ligne matérielle rattachée à la paroi solide . . .	21
Figure 2.7	Visualisation d'un jet impactant	25
Figure 2.8	Divisions des zones d'un jet impactant	25
Figure 2.9	Décollement instationnaire et dynamique tourbillonnaire se produisant dans la couche limite à l'impact d'un tourbillon	26
Figure 3.1	Représentation schématique du montage en boucle fermée d'un jet impactant	29
Figure 3.2	Vue isométrique du montage du jet impactant	30
Figure 3.3	Coupe des composantes fixées au réservoir de mesure	31
Figure 3.4	Dessin de détail des composantes du réservoir de mesure lors de prises de mesure PIV	32
Figure 3.5	Éléments d'un montage PIV	33
Figure 3.6	Corrélation à partir d'une paire d'images de particules	34
Figure 3.7	Intérieur d'un laser utilisé pour la PIV	36
Figure 3.8	Le système de lentilles de la nappe laser	37
Figure 3.9	Configuration classique de montage PIV	38
Figure 3.10	Schématisation d'un mouvement d'une particule	39
Figure 3.11	Schématisation de la condition de Scheimpflug	40
Figure 3.12	Schématisation du fonctionnement d'un montage de PIV stéréoscopique	40
Figure 3.13	Exemple analytique d'images et de corrélation PIV	43
Figure 3.14	Schématisation de la méthode d'interpolation sous-pixel	44

Figure 3.15	Géométrie et longueurs caractéristiques du convergent de la buse . . .	45
Figure 3.16	Profil de vitesse à la sortie d'un convergent	46
Figure 3.17	Profil de vitesse axiale u du montage initial	47
Figure 3.18	Évolution de la température et de la viscosité de l'eau	48
Figure 3.19	Première série de mesures d'un jet impactant sur une plaque plane . .	49
Figure 3.20	Modification de la distance H/D et du débit d'un jet impactant . . .	50
Figure 3.21	Contraction supplémentaire ajoutée au montage	51
Figure 3.22	Influence de la longueur de la contraction sur l'écoulement de sortie .	52
Figure 3.23	Dessin technique de la buse initiale du montage et de la buse imprimée	53
Figure 3.24	Comparaison du profil jet en sortie de la buse	53
Figure 3.25	Profils de vitesse à la sortie de la nouvelle contraction	54
Figure 3.26	Présentation de quatre champs de vitesse de jets libres et pulsés . . .	56
Figure 3.27	Signaux mesurés des jets libres et pulsés	57
Figure 3.28	Fréquence naturelle du jet libre	58
Figure 3.29	Une période d'un jet pulsé	59
Figure 3.30	Montage pour synchroniser le piston et la caméra	61
Figure 3.31	Conditionnement de la matrice et erreur d'approximation pour diffé- rents types de polynômes	65
Figure 3.32	Polynômes de Legendre ayant un degré inférieur à 5	66
Figure 3.33	Fonctions d'interpolation quartique de Legendre et de Lagrange . . .	68
Figure 3.34	Visualisation de la structure de données des éléments	68
Figure 3.35	Instants t nécessaires à la résolution temporelle d'une méthode BDF en fonction de l'ordre de précision p	70
Figure 4.1	Géométrie et paramètres de l'écoulement généré par un cylindre en translation et en rotation	74
Figure 4.2	Décollement fixe pour un écoulement périodique en temps	75
Figure 4.3	Décollement mobile	77
Figure 4.4	Schéma du décollement autour du point selle lagrangien	80
Figure 4.5	Prédiction du décollement mobile	82

Figure 4.6	Extraction du point et de l'angle du décollement	88
Figure 4.7	Prédiction du décollement mobile (repère du cylindre)	89
Figure 4.8	Suivi du point et du profil de décollement en temps	89
Figure 5.1	Lignes de courant autour d'un cylindre stationnaire	91
Figure 5.2	Caractéristique de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation . . .	93
Figure 5.3	Évolution temporelle du point de décollement aval du cylindre	95
Figure 5.4	Lignes de courant obtenues de l'écoulement moyenné sur une période de détachement tourbillonnaire	97
Figure 5.5	Analyse des mécanismes de décollement des allées tourbillonnaires de von Kármán	98
Figure 5.6	Prédiction théorique du profil de décollement pour $Re = 350$	100
Figure 5.7	Visualisation de particules dans le sillage du cylindre pour $Re = 350$.	101
Figure 5.8	Visualisation du champ FTLE derrière un cylindre pour $Re = 350$. .	102
Figure 5.9	Cinématique de la LCS située dans la partie supérieure du cylindre .	103
Figure 5.10	Prédiction du profil de décollement derrière le cylindre	104
Figure 5.11	Vue globale du profil de décollement	104
Figure 5.12	Mécanisme du décollement instationnaire d'un jet impactant	106
Figure 5.13	Visualisation de la région impactée d'un jet vertical	107
Figure 5.14	Valeur du taux d'étirement en fonction de la coordonnée curviligne .	108
Figure 5.15	Advection en temps des LCSs près de la paroi	111
Figure 6.1	Décollement d'un jet impactant expérimental	113
Figure 6.2	Évolution d'une LCS près de la paroi d'un jet impactant	114
Figure 6.3	Schématisation de la formation d'un anneau tourbillonnaire	115
Figure 6.4	Erreur sur la vitesse moyenne en fonction du nombre de séries utilisées pour la moyenne de phase	118
Figure 6.5	Écoulements de l'anneau tourbillonnaire	119
Figure 6.6	FTLE et LCS d'un anneau tourbillonnaire	120
Figure 6.7	Analyse des phénomènes de décollement d'un anneau tourbillonnaire	121

LISTE DES ANNEXES

Annexe A	ÉQUATION DE LA COUCHE LIMITE	132
Annexe B	IDENTIFICATION DE L'ANGLE DU DÉCOLLEMENT	134
Annexe C	FORMULATIONS FAIBLES	136
Annexe D	ÉCOULEMENT RAMPANT AUTOUR D'UN CYLINDRE EN ROTATION	137

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Acronymes

BDF	Backward Differentiation Formula
FTLE	Finite-Time Lyapunov Exponent
LCS	Lagrangian Coherent Structures
PIV	Particule Image Velocimetry
MRS	Principe de Moore–Rott–Sears

Caractères usuels

d_x, d_y	Déplacement d’une particule
d_p	Diamètre d’une particule
\mathbf{e}, \mathbf{n}	Vecteurs tangents et normaux d’une LCS
\mathbf{f}	Fonction vectorielle
f_i	Composante d’une fonction vectorielle
Re	Nombre de Reynolds
St	Nombre de Strouhal
t	Temps
t_0	Temps initial
\mathbf{u}	Champ de vitesse
u, v, w	Composantes du champ de vitesse
U_c	Vitesse de convection
\mathbf{v}	Vecteur unitaire
$\mathbf{x} = (x, y, z)$	Coordonnées spatiales
\mathbf{x}_0	Coordonnées initiales d’une particule

Lettres calligraphiques

\mathcal{H}	Matrice hessienne
\mathcal{O}	Ordre de l’erreur d’une approximation
\mathcal{S}	Tenseur de déformation de Cauchy-Green
\mathcal{T}	Temps d’intégration lors du calcul des trajectoires
\mathcal{M}, \mathcal{N}	Lignes matérielles attractive et répulsive

Lettres grecques

λ	Valeur propre de tenseur de Cauchy–Green
	Mesure de l’étirement sur une LCS
$\sigma_{t_0}^T$	Exposant de Lyapunov
τ	Variable temporelle
τ_p	Cisaillement pariétal
φ, q	Fonction test
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique
ρ_p	Masse volumique d’une particule
θ	Angle de la tangente au profil de décollement
$\omega = (\xi, \eta, \zeta)$	Vecteur de la vortacité
Ω	Domaine de calcul

Opérateurs

$\det \mathbf{A}$	Déterminant d’une matrice
$\nabla \mathbf{a}$	Opérateur gradient
$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}$ ou \mathbf{a}_x	Dérivée partielle de \mathbf{a} par rapport à x
$\big _{x_0}$	Évalué en x_0
$ \cdot $	Valeur absolue
	Déterminant
	Semi-norme
$\ \cdot\ $	Norme
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$	Produit tensoriel des tenseurs \mathcal{A} et \mathcal{B}
$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ ou $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Produit scalaire des vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b}

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Le décollement de la couche limite reste un des problèmes irrésolus les plus importants de la dynamique des fluides, et probablement un des plus critiques à résoudre puisque ses effets affectent plusieurs systèmes d'ingénierie. L'efficacité optimale de ces systèmes est en effet souvent atteinte pour des conditions d'écoulement proches de celles menant au décollement, ce qui rend sa prédiction très cruciale pour l'industrie. Des études d'aérodynamique tentent depuis plusieurs années de s'inspirer des animaux (Greenewalt, 1975; Hubel et Tropea, 2010), par exemple, l'efficacité des techniques de vol de certains rapaces, qui minimisent le décollement sur leurs ailes et la grosseur des tourbillons relâchés dans leur sillage par rapport aux oiseaux plus communs, s'explique par la flexibilité de leurs ailes, le positionnement et l'agencement de leur plumage (Ben-Gida *et al.*, 2015). Pour les hiboux, ces optimisations leur permettent d'être plus silencieux et de surprendre leurs proies (Jaworski et Peake, 2013).

Prandtl (1904) a subdivisé les écoulements en deux sections distinctes, la couche limite où les effets visqueux sont très importants et responsables de la majorité du frottement, et l'écoulement externe où la viscosité peut être négligée sans effet significatif sur les structures générales. Cette théorie novatrice a permis la simplification de l'équation de Navier–Stokes et est utilisée dans plusieurs domaines industriels afin d'obtenir des résultats préliminaires et faciliter les phases de design. Depuis ces travaux pionniers sur le décollement des écoulements stationnaires en deux dimensions, un nombre considérable d'idées ont été proposées afin de capturer le décollement instationnaire en deux et trois dimensions.

Plusieurs études se sont concentrées sur la résolution des équations de la couche limite, en définissant le décollement comme l'état entraînant une singularité de la solution de ces équations (Perry et Fairlie, 1975). Le même postulat a aussi été utilisé par Van Dommelen et Cowley (1990), pour capturer le décollement instationnaire de la couche limite, mais selon un repère lagrangien (coordonnées lagrangiennes), ce qui permet de mieux révéler la nature du décollement et offre plusieurs avantages comparativement aux repères eulériens. Cependant, dans les deux cas, l'apparition d'une singularité dans la résolution numérique des équations de la couche limite implique l'invalidation des hypothèses initiales de ces équations, mais ceci n'implique pas nécessairement que cette singularité est reliée à un phénomène de décollement (voir Sears et Telionis, 1975; Ruban *et al.*, 2011; Cassel et Conlisk, 2014).

Un critère général afin de détecter le décollement instationnaire n'a été déterminé qu'avec les récents travaux de Haller (2004), qui propose une théorie cinématique pour les écoulements en deux dimensions. Cette nouvelle approche, lagrangienne et non linéaire, identifie le décol-

lement comme une instabilité matérielle créée par une ligne matérielle émanant d'un point à la paroi. Avec le temps, ces structures instables attirent et éjectent les particules près de la paroi, et la théorie permet de déterminer la position et la forme du profil de décollement. Un des résultats les plus remarquables est que cette approche peut être appliquée aux écoulements instationnaires, compressibles et incompressibles, ce qui a permis d'unifier différents travaux antérieurs en une seule théorie.

Haller (2004) définit deux types de décollement. Un *décollement fixe* se produit lorsque l'écoulement possède une valeur moyenne bien définie, comme dans le cas des écoulements périodiques où les caractéristiques du décollement sont faciles à obtenir, car la méthodologie peut être appliquée sur une seule période. Dans ce cas, le point du décollement à la frontière ne se déplace pas, mais est fixé à l'endroit où la moyenne (calculée sur une période) du frottement pariétal instantané est nulle (pondéré par une fonction de la densité du fluide lorsque les effets compressibles sont importants). La dépendance temporelle n'intervient que dans la forme du profil de décollement, principalement lors de l'évaluation de l'angle du décollement. Ces résultats ont depuis été étendus à des écoulements tridimensionnels en régime permanent (Surana *et al.*, 2006), puis à des écoulements instationnaires en trois dimensions (Surana *et al.*, 2008b).

Le deuxième type de décollement est le *décollement mobile*, et son traitement est considérablement plus délicat. Ce phénomène se produit lorsque le point de décollement bouge ou apparaît et disparaît à l'intérieur de l'écoulement qui ne possède plus de moyenne temporelle. Puisque la théorie classique ne peut s'appliquer, Haller (2004) utilise des lignes matérielles instables en temps fini afin de capturer le point mobile, menant à la capture de profils de décollement non uniques. Dans une contribution supplémentaire, Surana et Haller (2008) proposent un critère afin de capturer le décollement pour les écoulements où la moyenne et les fluctuations sont caractérisées par différentes échelles temporelles, par exemple, au sein de la traînée d'un cylindre soumis à un écoulement transitoire. Ces deux contributions définissent le décollement mobile à la position où la moyenne du frottement pariétal instantané est nulle, ce qui nécessite initialement d'extraire la composante moyenne de l'écoulement.

Malgré le potentiel et l'impact de ces travaux récents, peu d'études ont tenté de les valider expérimentalement. Ceci peut s'expliquer principalement par deux raisons. La première vient de la difficulté à mesurer toutes les quantités requises. Dans le cas d'un décollement fixe, la position stationnaire du décollement à la paroi est déterminée à l'aide de quantités moyennes pariétales du cisaillement, de la pression et de leurs dérivées spatiales respectives. Cependant, l'angle du profil de décollement, qui dépend du temps, nécessite les valeurs instantanées de ces quantités. La pression pariétale n'est pas triviale à mesurer précisément surtout en

présence de fréquences élevées, mais cela reste possible à l'aide de procédures expérimentales soigneusement exécutées. À l'opposé, le cisaillement pariétal est toujours difficile à mesurer précisément, d'autant plus que la résolution spatiale doit être assez fine pour permettre le calcul de dérivées spatiales. En date d'aujourd'hui, une seule étude expérimentale est présente dans la littérature. Weldon *et al.* (2008) ont étudié l'écoulement généré par un cylindre en rotation autour de son axe, lequel peut être oscillé parallèlement à la paroi. Lors de mouvements périodiques, quasi périodiques et aléatoires, les observations révèlent que le décollement émane d'un point fixe à la paroi, sa position et son orientation temporelles étant prédites par la théorie. Il est important de noter que ce seul exemple concerne un écoulement lent et très visqueux dans un régime quasi stationnaire de Stokes (basé sur le diamètre du cylindre et la vitesse circonférentielle, le nombre de Reynolds est plus petit que 1). De plus, des simulations numériques ont été réalisées afin de fournir les informations manquantes ne pouvant être obtenues de l'expérience, qui ont servi principalement qu'à des fins de visualisations de l'écoulement.

En conséquence, le critère de décollement n'a principalement été validé que par des modèles numériques. Une grande majorité de ces études utilisent différentes variantes d'un modèle de bulle de décollement instationnaire dérivé de Ghosh *et al.* (1998), ou d'écoulements dérivées de développements en séries de Taylor au voisinage de la paroi, obtenus à partir de l'équation de Navier–Stokes à l'aide de l'algorithme de Perry et Chong (1986) (Haller, 2004; Kilic *et al.*, 2005; Surana *et al.*, 2006). Dans ces exemples, puisque tout l'écoulement est dérivé de données pariétales, il semble alors raisonnable de supposer que le décollement pourra être détecté à l'aide de valeurs à la paroi. Quelques modèles plus complexes, obtenus de la solution complète de l'équation de Navier–Stokes, sont utilisés dans Surana *et al.* (2007) et Surana *et al.* (2008b), mais aucun ne présente des écoulements dominés par les effets tourbillonnaires et turbulents.

La position du décollement peut facilement être prédite de données de simulations numériques pour les écoulements laminaires, mais cette tâche est naturellement plus complexe en présence d'écoulements turbulents. Le comportement de l'écoulement dans la région pariétale ne doit pas être influencé par la modélisation de paroi, présente dans les simulations de type RANS et dans les simulations des grandes échelles de la turbulence (LES). Pour leur part, les simulations directes nécessitent des temps de calcul et des ressources immenses afin d'obtenir la convergence statistique des valeurs moyennes de l'écoulement. Cette deuxième difficulté explique pourquoi peu d'études tentent d'examiner la validité de la théorie cinématique du décollement, car jusqu'à présent, les visualisations d'écoulements semblent toutes indiquer qu'avec la turbulence, le décollement de l'écoulement est toujours *mobile*. Il faut cependant réaliser que dans certains cas, la région à la paroi où est attaché le profil de décollement peut être si petite que sa détection précise est très difficile (Weldon *et al.*, 2008).

1.1 Objectifs de la thèse

L'objectif de ce travail est de contribuer à la compréhension du décollement de la couche limite et d'établir une méthodologie permettant de caractériser le décollement d'écoulements instationnaires et caractérisés par une dynamique tourbillonnaire importante en combinant des approches analytique, numérique et expérimentale.

Plus précisément, les objectifs sont de :

1. confronter les prédictions des théories lagrangiennes récentes à des décollements plus complexes que ceux traités dans la littérature ;
2. proposer une méthodologie pour prédire les phénomènes de décollement ;
3. élaborer des méthodes numériques pour extraire les caractéristiques spatio-temporelles du profil de décollement ;
4. créer un montage expérimental et appliquer la méthodologie à des données réelles et physiques.

1.2 Organisation de la thèse

La thèse est subdivisée en sept chapitres. Le chapitre 2 débute par une revue de littérature du décollement de la couche limite et des méthodes d'analyse. Ensuite, le chapitre 3 présente la méthodologie suivie au cours de mon projet doctoral, soit l'élaboration d'un montage expérimental ainsi que la mise en œuvre de méthodes numériques afin d'obtenir des bases de données de vitesse expérimentales et numériques. Le chapitre 4 présente l'élaboration d'une méthode d'extraction et de prédiction du décollement instationnaire, qui sera appliquée sur des écoulements numériques au chapitre 5 et expérimentaux au chapitre 6. Finalement, le chapitre 7 présente la synthèse des travaux, les limitations ainsi que différentes pistes d'améliorations pour les recherches futures.

CHAPITRE 2 REVUE DE LITTÉRATURE SUR LE DÉCOLLEMENT DES COUCHES LIMITES

La prédiction du décollement a été abordée par différentes théories qui peuvent être réparties en deux grandes catégories : les approches eulériennes, qui se focalisent sur les variables de champ des écoulements (par exemple des gradients du champ de vitesse et des valeurs pariétales), et les approches lagrangiennes, qui au contraire sont basées sur l’analyse de trajectoires de particules de fluide. Ce sont ces deux approches qui sont détaillées ici.

2.1 Méthodes eulériennes

La première théorie formalisant le concept de couche limite a été introduite par Prandtl au début du 20^e siècle. Ses travaux ont permis de prédire, pour des écoulements bidimensionnels et stationnaires, la position du décollement en présence d’un gradient de pression adverse. Dans cette situation, le profil de vitesse à la paroi est graduellement modifié (voir Fig. 2.1) et entraîne la création d’une zone de recirculation, présentée à la figure 2.1(c). Il existe une position critique, à la figure 2.1(b), où le gradient de la vitesse dans la direction normale à la paroi est nul. Ce critère permet de détecter la position du décollement en évaluant le cisaillement à la paroi $\tau_p = \mu \partial u / \partial y$ et en identifiant la position où cette quantité s’annule.

Un des points les plus importants de ces travaux est la réalisation de l’importance du comportement de la couche limite qui peut avoir un effet considérable sur les caractéristiques et les structures globales de l’écoulement, ce qui est encore plus percutant en présence d’un décollement. Or, le critère de Prandtl n’est plus valide ni en instationnaire, ni en trois dimensions, ce qui a motivé de nombreuses études pour définir un critère qui aurait une dimension universelle.

2.1.1 Singularité des équations de couche limite

Une autre approche, présentée par Landau et Lifshitz (1987), permet d’obtenir le même résultat que Prandtl en exploitant le comportement asymptotique du point de décollement de la couche limite. Bien que le résultat soit le même, cette méthode a amené de nombreuses études en dynamique des fluides (Goldstein, 1948; Walker *et al.*, 1987; Gersten et Herwig, 1992).

L’équation de la couche limite est obtenue par l’évaluation des ordres de grandeur des différents termes de l’équation de Navier–Stokes afin de ne conserver que ceux qui influencent

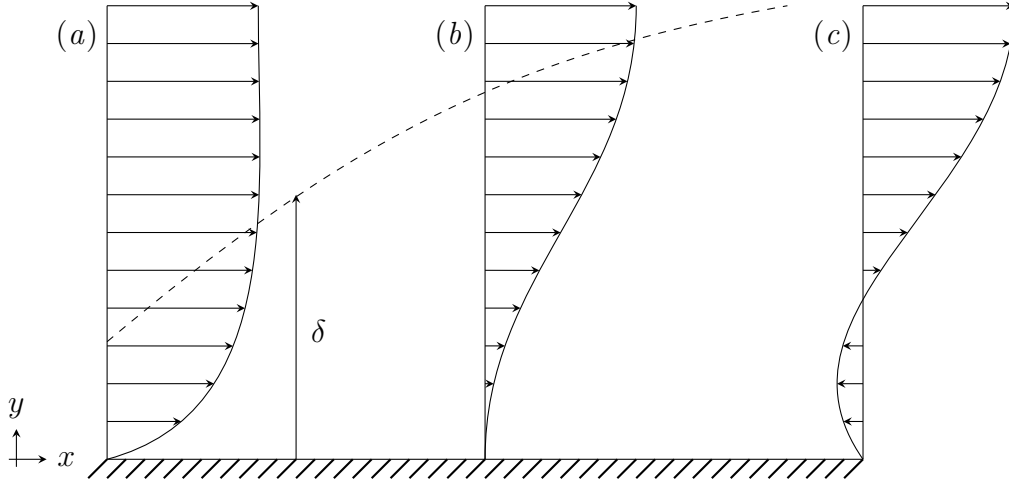


Figure 2.1 Profils de vitesse de la couche limite près d'une paroi en amont du décollement (a), au point de décollement (b) et en aval du point de décollement (c). Le gradient de pression est positif dans le sens de l'écoulement, soit de (a) à (c)

l'écoulement, dans cette région près de la paroi. Le développement complet permettant d'obtenir le système d'équations (2.1) et (2.2) est présenté à l'annexe A et donne :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (2.2)$$

En posant $y = 0$ à la paroi dans l'équation (2.2), on a

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.3)$$

L'équation (A.4) établit que le ratio $v/u \sim \mathcal{O}(Re^{-1/2})$. Landau et Lifshitz concluent alors que pour qu'un décollement se produise, l'augmentation spontanée de la composante de la vitesse transversale v n'est possible que si les équations de la couche limite possèdent une singularité au point de décollement.

Hypothèse 1 *Landau et Lifshitz définissent que si le nombre de Reynolds est assez élevé, l'augmentation de la vitesse v est infinie au point de décollement x_s , soit $v(x_s, y) = \infty$. Les équations de couche limite ne sont plus valides en aval de ce point singulier.*

Cette hypothèse est valide pour toutes valeurs de y , sauf naturellement à la paroi puisque

la vitesse est nulle. À l'aide de cette hypothèse et de l'équation de continuité, on peut alors déduire qu'au point de décollement :

$$\left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{x=x_s} = \infty, \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_s} = -\infty \quad \text{ou} \quad \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{x=x_s} = 0, \quad (2.5)$$

en exprimant x comme une fonction de y et de u . En adoptant cette dernière forme, et toujours en suivant le raisonnement de Landau et Lifshitz, on peut écrire une approximation de x au voisinage amont de x_s à l'aide d'une série de Taylor basée sur l'écart de vitesse $u - u_s$ à y donné :

$$x_s \simeq x + f(y) (u - u_s)^2 + \mathcal{O}((u - u_s)^3), \quad (2.6)$$

avec $u_s = u(x_s, y)$ et le terme d'ordre 1 étant nul d'après (2.5).

En négligeant les termes d'ordres supérieurs et en transformant l'expression afin d'isoler la variation de la vitesse $u(x, y)$ près du point de décollement, on obtient

$$u \simeq u_s + g(y) \sqrt{x_s - x}, \quad (2.7)$$

où $g(y) = 1/\sqrt{f(y)}$ est une fonction de y que l'on relie aux composantes de la vitesse à l'aide de l'équation de la continuité,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{g(y)}{2\sqrt{x_s - x}}, \\ v(x, y) &\simeq \frac{h(y)}{\sqrt{x_s - x}}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

où $h(y) = \frac{1}{2} \int_y g(y) dy$. Notons que cette partie permet d'obtenir une expression de la vitesse transversale près du point de décollement. Il reste alors à déterminer l'expression de $g(y)$ et $h(y)$.

Toujours à l'aide de l'hypothèse 1, les termes de l'équation de la quantité de mouvement (2.2) selon la composante x , $U_c \partial U_c / \partial x$ et $\partial^2 u / \partial y^2$ ne peuvent tendre vers l'infini lorsque $x \rightarrow x_s$. Cependant, les deux termes des forces inertielles du membre de gauche tendent vers l'infini lorsque l'on s'approche du point de décollement, ce qui permet de simplifier l'équation et de considérer que près de ce point singulier

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \simeq 0. \quad (2.9)$$

On peut écrire avec l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} -u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} &\simeq 0, \\ u^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right) &\simeq 0. \end{aligned}$$

On peut alors simplifier

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v}{u} \right) \simeq 0, \quad (2.10)$$

puisque u ne s'annule pas près du point de décollement.

Finalement, des équations (2.7)-(2.8), on approxime le ratio v/u par :

$$\frac{v}{u} = \frac{h(y)}{u_s \sqrt{(x_s - x)}} + \mathcal{O}(1), \quad (2.11)$$

et puisque ce ratio ne doit être fonction que de x , l'expression $h(y)$ doit annuler les termes fonctions de y du dénominateur,

$$h(y) = \frac{1}{2} K u_s \quad (2.12)$$

où K est une constante. Puisque, par définition, $g(y) = 2dh/dy$, on détermine que

$$g(y) = K \frac{du_s}{dy}. \quad (2.13)$$

Cela permet d'exprimer les deux composantes de la vitesse près du point de décollement (Eq. 2.7-2.8), par

$$\begin{aligned} u(x, y) &\simeq u_s + K \frac{du_s}{dy} \sqrt{x_s - x}, \\ v(x, y) &\simeq \frac{K u_s}{2 \sqrt{x_s - x}}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Les équations (2.14) permettent alors de déterminer les conditions nécessaires au décollement en considérant qu'à la paroi ($y = 0$), les vitesses $u(x, 0)$ et $v(x, 0)$ doivent être nulles. Il faut donc que

$$\begin{aligned} u_s &= 0, \\ \frac{du_s}{dy} &= 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

soit que la vitesse longitudinale et sa dérivée par rapport à y s'annulent au point de décollement, ce qui correspond aux deux conditions données par Prandtl. Cela implique qu'au point de décollement x_s , la dérivée seconde de la vitesse u est positive d'après (2.3) ce qui induit

$$\frac{\partial U_c}{\partial x} < 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} > 0. \quad (2.17)$$

Ceci confirme que la vitesse du milieu externe diminue selon x et que le décollement se produit en présence d'un gradient de pression adverse.

2.1.2 Méthodes des points critiques – Identification de l'angle du décollement

Durant les années 1960 à 1970, de nombreux mathématiciens ont étudié différents phénomènes de la dynamique des fluides et en particulier le décollement de la couche limite. Perry et Fairlie (1975) ont utilisé la méthode du plan de phase, une technique bien connue pour l'analyse de systèmes dynamiques (Schuster, 1960; Andronov *et al.*, 1966), qui permet d'observer graphiquement le comportement d'équations non linéaires afin de déterminer les caractéristiques autour de points critiques. Dans le contexte de la dynamique des fluides, la méthode est appliquée autour d'un point de décollement (ou de recollement).

La méthode permet d'analyser n'importe quel ensemble d'équations différentielles non linéaires du premier ordre mises sous la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{H}(\mathbf{x}),$$

ce qui correspond, par exemple, à l'équation des trajectoires en dynamique des fluides. En considérant un écoulement bidimensionnel dans le plan (x, y) , les trajectoires s'expriment par

$$\dot{x} = P(x, y) \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (2.18)$$

avec P et Q des fonctions non linéaires. L'idée est alors de linéariser ces fonctions près d'un point critique et d'exprimer l'équation (2.18) sous la forme

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$$

Par l'utilisation d'une telle transformation, les trajectoires peuvent être décrites sous une

forme canonique. Dans ce nouveau système de coordonnées, il est possible de relier les trajectoires autour d'un point critique à celles autour d'un puit, d'une source ou d'une spirale. En fait, les valeurs propres de la matrice jacobienne \mathbf{F} (λ_1 et λ_2) permettent d'analyser le point critique. De plus, la pente formée par chacun des vecteurs propres au point critique peut être exprimée en fonction des coefficients de \mathbf{F} et des valeurs propres, soit

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -\frac{1}{2} \left[p \pm (p^2 - 4q)^{1/2} \right], \\ m_1 &= \frac{\lambda_1 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_1 - d}, \\ m_2 &= \frac{\lambda_2 - a}{b} = \frac{c}{\lambda_2 - d},\end{aligned}\tag{2.20}$$

ce qui permet d'identifier l'angle des trajectoires émanant d'un point critique. En outre, la classification d'un point critique peut s'effectuer avec deux paramètres, $p = -\text{Tr}(\mathbf{F})$ et $q = \det(\mathbf{F})$ qui sont respectivement la trace et le déterminant de la matrice jacobienne. Les différents cas sont présentés à la figure 2.2 en fonction de $p - q$.

En écrivant (2.19) à l'aide de données de frottement pariétal plutôt que des gradients du champ de vitesse, on peut caractériser les points critiques de frottement sur une surface.

On peut également appliquer la méthode des points critiques au sein même de l'écoulement.

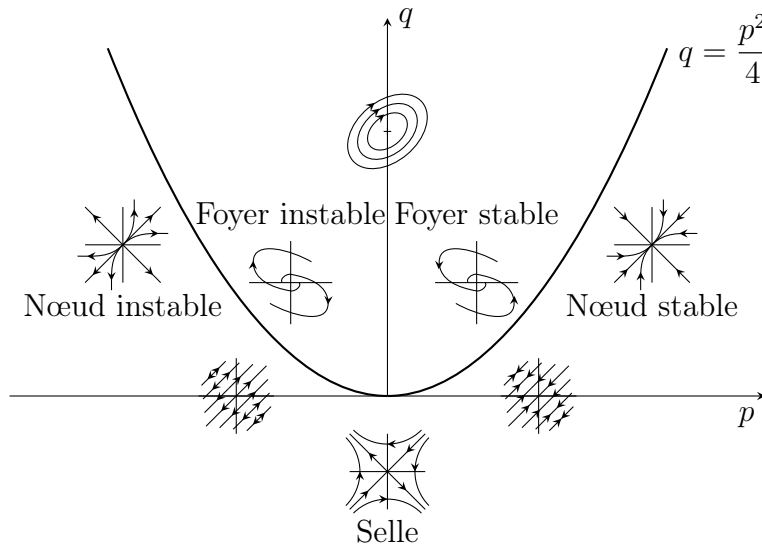


Figure 2.2 Identification du type de point critique en fonction de p et q . Les points situés en $q = 0$ sont dit dégénérés, ceux situés en $p = 0$ et $q > 0$ sont des centres et les autres types sont indiqués directement sur la figure

Par exemple, l'analyse d'un plan de la couche limite tridimensionnelle, présentée dans Perry

et Fairlie (1975), permet d'illustrer la puissance de ce type de technique et de déterminer l'angle formé par le décollement à la paroi définie par le plan (x, y) .

On suppose d'abord que le vecteur vitesse s'exprime par

$$\mathbf{u} = \phi(\mathbf{x})\mathbf{F} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.21)$$

où $\phi(\mathbf{x})$ est une fonction scalaire de l'espace réel \mathbf{x} , \mathbf{F} la matrice jacobienne qui permet la transformation dans l'espace du plan de phase. On définit ensuite une nouvelle variable temporelle,

$$d\tau = \phi(\mathbf{x}) dt \quad (2.22)$$

afin d'exprimer la transformation de l'espace réel à l'espace du plan de phase telle que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}, \quad (2.23)$$

afin de retrouver la forme (2.19), ou de manière équivalente

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z, \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z, \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z, \end{aligned} \quad (2.24)$$

où le prime identifie la dérivée par rapport à τ . La condition de non-glissement à la paroi (en $z = 0$) permet d'obtenir une approximation du premier ordre,

$$\phi(\mathbf{x}) = z, \quad d\tau = z dt \quad (2.25)$$

et d'exprimer les composantes de la vitesse de (2.21) :

$$\begin{aligned} u &= z(a_1x + b_1y + c_1z), \\ v &= z(a_2x + b_2y + c_2z), \\ w &= z(a_3x + b_3y + c_3z). \end{aligned} \quad (2.26)$$

En introduisant ces approximations linéaires dans l'équation de Navier-Stokes et de la continuité, il est possible d'obtenir des relations entre les différents coefficients de \mathbf{F} . Cette étape fastidieuse, présentée à l'annexe B, permet d'écrire x', y', z' en fonction de variables mesu-

rables à la paroi (pression et cisaillement pariétal) :

$$\begin{aligned} x' &= \eta_x x + \eta_y y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\nu} z, \\ y' &= -\xi_x x - \xi_y y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2\nu} z, \\ z' &= \frac{1}{2} (\xi_y - \eta_x) z, \end{aligned} \quad (2.27)$$

où le vecteur de la vorticité est défini par $\boldsymbol{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$ et les indices indiquent les dérivées partielles.

En se positionnant au plan $y = 0$, on peut simplifier la dernière expression en ne conservant que les composantes x et z et représenter graphiquement le point critique par

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_x & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\nu} \\ 0 & \frac{1}{2} (\xi_y - \eta_x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

et calculer les paramètres p et q ,

$$p = -(a + d) = -\frac{1}{2} (\eta_x + \xi_y), \quad (2.29)$$

$$q = ad - cd = \frac{1}{2} \eta_x (\xi_y - \eta_x). \quad (2.30)$$

Si on considère que η_x et ξ_y sont négatifs alors $p > 0$ et en fonction du ratio η_x/ξ_y , il est possible de déterminer la nature du point de décollement. Les trois possibilités sont présentées à la figure 2.3 :

- $\eta_x/\xi_y \gg 1$, q est négatif et le point critique est un point selle (Fig. 2.3a).
- $\eta_x/\xi_y \simeq 1$, q est nul et le point critique est un point dégénéré (Fig. 2.3b).
- $\eta_x/\xi_y \ll 1$, q est positif et le point critique est un nœud stable (Fig. 2.3c).

En présence d'un décollement, le point critique doit assurément être un point selle puisque les trajectoires autour d'un point dégénéré et d'un nœud stable ne sont pas physiques et ne s'éloignent tout simplement pas de la paroi. Les vecteurs propres seront respectivement alignés avec les droites m_1 et m_2 présentées à la figure 2.3(a). Il est donc possible de déterminer l'angle du décollement à l'aide de l'expression de la pente m_1 (Eq. 2.20) en négligeant les termes d'ordre supérieur,

$$m_1 = \tan \theta = \frac{2\nu \left(\frac{1}{2} \xi_y - \frac{3}{2} \eta_x \right)}{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}. \quad (2.31)$$

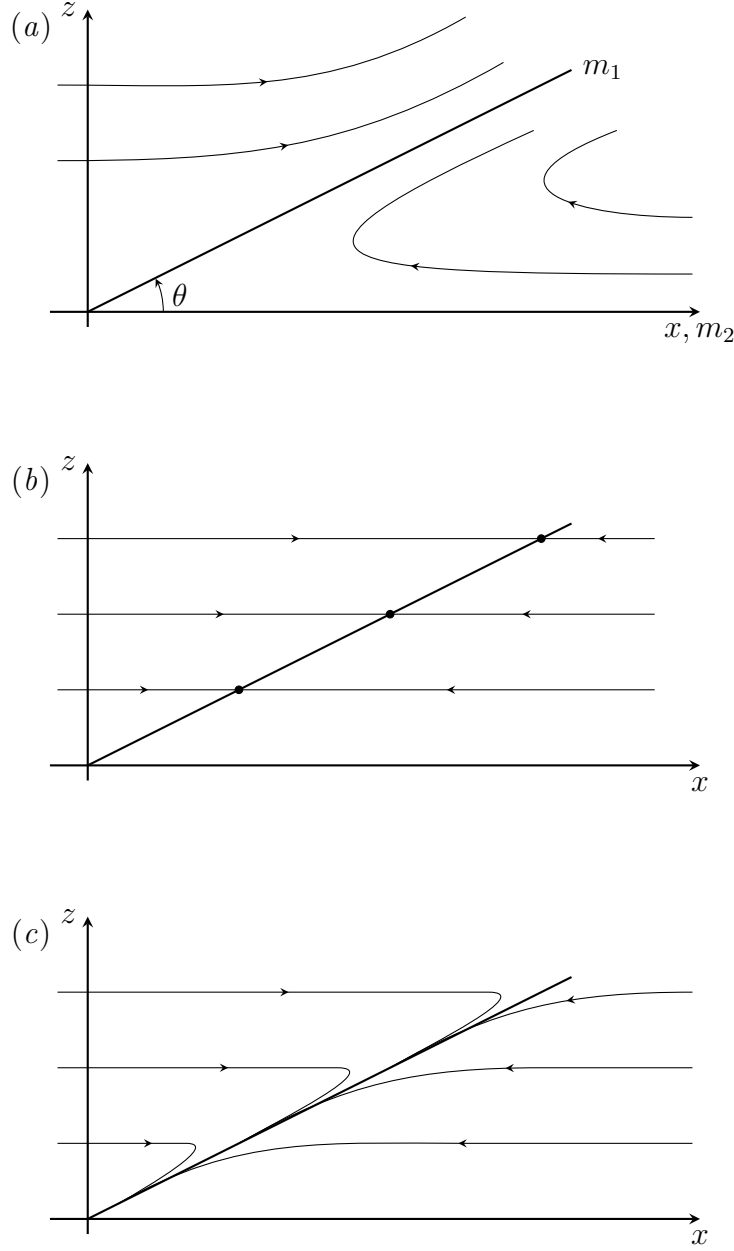


Figure 2.3 Analyse du point critique en fonction du ratio η_x/ξ_y . En (a) le ratio $\eta_x/\xi_y \gg 1$, en (b) le ratio $\eta_x/\xi_y \simeq 1$ et en (c) le ratio $\eta_x/\xi_y \ll 1$. La ligne en gras représente la ligne de décollement et les lignes avec des flèches indiquent les trajectoires autour du point critique

En 2D, $\xi = \zeta = 0$ et $\eta = u_z$, (le ratio $\eta_x/\xi_y \gg 1$, Fig. 2.3a) et on obtient l'expression de l'angle du décollement d'une couche limite bidimensionnelle, exprimée sous plusieurs formes

$$\theta = \tan^{-1} \left(-\frac{3\mu\eta_x}{p_x} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{3\tau_x}{p_x} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{3u_{xz}}{u_{zz}} \right), \quad (2.32)$$

avec $\tau_x = \mu u_{xz}$, ce qui correspond à l’expression classique obtenue aussi par Lighthill (1963). La dernière forme est obtenue à la paroi ($z = 0$), où le frottement τ est égal à u_z et de l’équation de Navier–Stokes, le gradient de pression est égal à u_{zz} .

L’étude des points critiques, malgré ces nombreux avantages, possède des inconvénients et des limitations importantes. Premièrement, la méthode peut être appliquée à des écoulements tridimensionnels, mais nécessite un traitement beaucoup plus complexe, ce qui limite l’utilisation à des plans bidimensionnels. Ensuite, l’approximation linéaire du champ de vitesse à la paroi ne permet que de déterminer l’angle du profil de décollement sans pouvoir identifier sa courbure (et les ordres supérieurs). Les résultats précédents sont majeurs, mais leur application est limitée aux écoulements bidimensionnels et stationnaires. Cependant, le critère est parfois utilisé pour l’identification du décollement d’écoulements beaucoup plus complexes (instationnaires et turbulents).

Finalement, l’aspect temporel des écoulements n’est pas pris en compte, l’angle n’est valide que pour des écoulements stationnaires. La section suivante présentera les travaux de Moore–Rott–Sears qui ont étendu les méthodes eulériennes aux écoulements instationnaires.

2.1.3 Application aux écoulements instationnaires

La prédiction du décollement à l’aide de la position du cisaillement nul à la paroi est utilisée abondamment depuis les 70 dernières années. La précision de la position du décollement augmente proportionnellement au nombre de Reynolds, et l’erreur entre la position prédite et la position réelle serait vraisemblablement de l’ordre de l’épaisseur de la couche limite δ . Les visualisations d’écoulements autour de parois mobiles, réalisées par Rott (1956) invalident le critère de Prandtl en présence d’instationnarité, ce qui amena à l’élaboration du critère MRS, du nom des trois collaborateurs principaux Moore (1958), Rott (1956) et Sears (1956).

Sears et Telionis (1975) proposent une méthodologie pratique, sans l’utilisation d’équations de couche limite, qui sont limitées. La décision de délaier les équations de la couche limite en quête de l’identification du décollement instationnaire émane principalement de la constatation que la présence d’une singularité au sein des équations de couche limite n’est pas nécessairement la conséquence d’un décollement, mais plutôt celle de l’invalidation des hypothèses et des approximations sur lesquelles les équations étaient fondées. Ceci sera repris par Haller (2004) qui démontre à l’aide d’exemples analytiques que les singularités peuvent apparaître dans des écoulements sans décollement (et l’inverse!). L’idée de départ de leur théorie est de généraliser le cas d’un décollement stationnaire au-dessus d’une paroi fixe, illustré à la figure 2.4(b), aux écoulements avec paroi mobile, comme étudié expérimentalement par Vidal (1959) et Ludwig (1964), et illustré pour chacune des directions aux figures 2.4(a) et

(c).

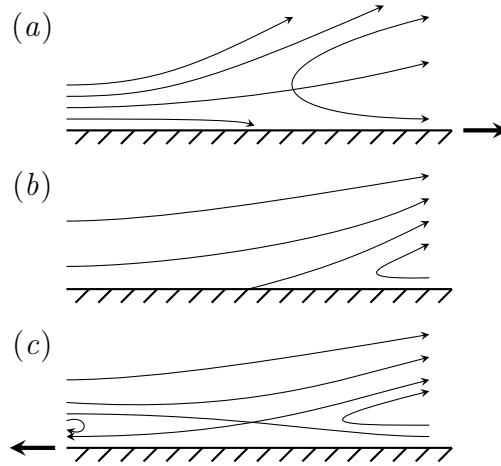


Figure 2.4 Lignes de courant de trois écoulements en fonction du mouvement de la paroi. En (a), la paroi se déplace vers la droite. En (b), la paroi est fixe et en (c) la paroi se déplace vers la gauche

Ceci a pour conséquence le déplacement vertical du point de cisaillement nul de la paroi vers l'intérieur du fluide. La figure 2.5 présente les profils de vitesse correspondant aux écoulements de la figure 2.4, dans un référentiel fixe (gauche) et dans le référentiel lié à la paroi (droite), *c.-à-d.* lorsque l'on soustrait la vitesse de déplacement de la paroi. Dans ce référentiel, le frottement à la paroi s'annule dans le cas d'un déplacement dans le sens de l'écoulement, soit à la figure 2.5(a) cependant la position du frottement nul se situe en amont de la position réelle du décollement. Lorsque la paroi se déplace dans le sens inverse de l'écoulement, le frottement ne s'annule nulle part sur la paroi (Fig. 2.5c).

Comme les écoulements dans le référentiel fixe étaient stationnaires, en se plaçant dans les référentiels mobiles avec la paroi, l'écoulement devient instationnaire et c'est la deuxième idée de Sears et Telionis qui proposent un modèle de décollement également valide pour les écoulements instationnaires. Ils présentent alors une approximation du champ de vitesse autour du point de décollement (x_0, y_0) (similaire à celle obtenue à la paroi par Landau et Lifshitz (1987) présentée à la section précédente) :

$$u(x, y, t) = u_0(\psi, t) + A(t) \frac{\partial u_0}{\partial y} \chi^{1/2} + \mathcal{O}(\chi^{3/4}) \quad (2.33)$$

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2} A(t) (u_0(\psi, t) - U_s(t)) \chi^{-1/2} + \mathcal{O}(\chi^{-1/4}) \quad (2.34)$$

pour $\psi \geq 0$ et $\chi \ll 1$ et où $u_0(\psi, t)$ est le profil de vitesse passant par x_0 , U_s est la vitesse au point de décollement ($U_s = \partial x_0 / \partial t$) et $A(t)$ est une fonction temporelle. Les coordonnées

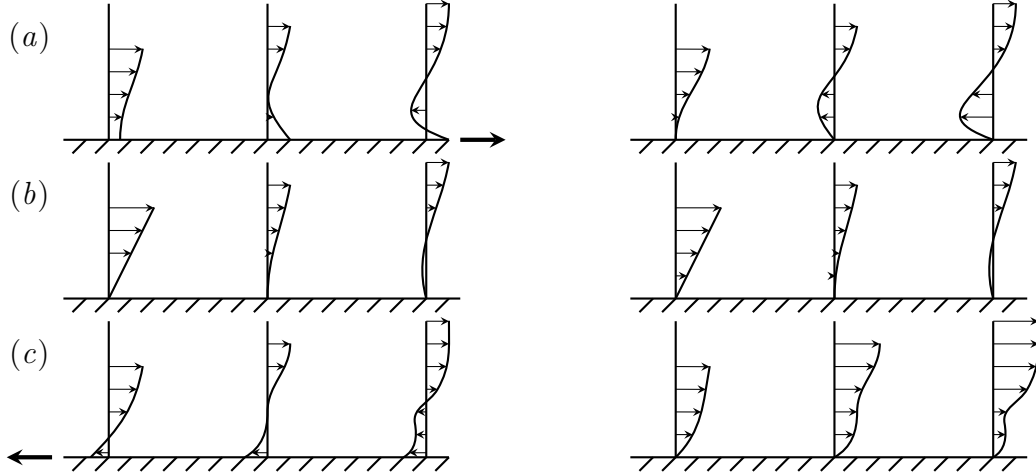


Figure 2.5 Profils de vitesse des mêmes écoulements présentés à la figure 2.4 dans un référentiel fixe (à gauche) et mobile (à droite), ce dernier obtenu en soustrayant la vitesse de déplacement de la paroi

x et y sont les coordonnées habituelles de la couche limite tandis que les coordonnées (χ, ψ) sont calculées par rapport au point de décollement, soit

$$\begin{aligned}\chi &= x_0(t) - x, \\ \psi &= y - y_0(t).\end{aligned}$$

Le point de décollement est défini comme un point de bifurcation en amont d'une bulle de recirculation ou d'un sillage se déplaçant parallèlement à la paroi. Cette description permet de déterminer deux conditions nécessaires à l'identification de ce point critique, soit le principe MRS :

$$\begin{aligned}U_s &= u_0(0, t), \\ \frac{\partial u_0(0, t)}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Connaissant la vitesse de translation U_s du point de décollement, il est possible de déterminer l'endroit sur le profil $u_0(\psi, t)$ où le cisaillement est nul, cette position n'étant pas située à la paroi. Cette expression est similaire au critère établi par Prandtl, mais étend le concept aux écoulements instationnaires. Bien que le critère MRS soit beaucoup cité dans la littérature, on pourra s'apercevoir qu'il n'a été validé que qualitativement. En effet, en pratique, il suppose de connaître la vitesse du point de décollement, ce qui le rend difficile, voire impossible, à utiliser.

2.2 Méthodes lagrangiennes

Les méthodes lagrangiennes comportent certains désavantages par rapport aux méthodes eulériennes (Cowley *et al.*, 1990) :

- aucun repère fixe (il est en fait fixé en fonction de la position initiale de chacune des particules) ;
- aucune analyse stationnaire (les trajectoires de particules sont par définition fonction du temps même lorsque le champ de vitesse est stationnaire) ;
- un développement parfois laborieux (construction de maillages et raffinements locaux, etc.).

Ces désavantages expliquent pourquoi de nombreux chercheurs se sont consacrés à l'étude du décollement à l'aide de méthodes eulériennes. L'évaluation des trajectoires de milliers (ou millions!) de particules implique un coût de calcul important, et de loin supérieur aux ressources disponibles il y a encore quelques années. Toutefois c'est aujourd'hui que les bénéfices commencent à apparaître.

2.2.1 Équation de la couche limite dans un repère lagrangien

Cependant, certains avantages sont très intéressants et permettent de diminuer le coût de calcul (Shen, 1978; Van Dommelen et Cowley, 1990; Van Dommelen, 1990). En fait, le repère lagrangien permet :

- le découplage des équations du mouvement parallèle et normal à la paroi (expliqué ci-dessous) ;
- un passage aux dimensions supérieures trivial.

Le champ de vitesse s'exprime par le système d'équations suivant (en 2D dans le plan (x, y)) :

$$\dot{x} = u(x, y, t) \quad \dot{y} = v(x, y, t). \quad (2.36)$$

Les coordonnées d'une particule fluide $(x(t), y(t))$ sont définies au temps initial t_0 avec

$$\mathbf{x}_0 = (x(x_0, y_0), y(x_0, y_0)) \quad \text{à} \quad t = t_0. \quad (2.37)$$

La matrice jacobienne ainsi que le jacobien (déterminant de la matrice) de cette transformation sont définis par :

$$J = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right| = \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} = x_{x_0} y_{y_0} - y_{x_0} x_{y_0} \quad (2.38)$$

La dérivée lagrangienne de J permet d'établir la relation en lagrangien de la conservation de la masse (ou l'équation de continuité) :

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dt}(x_{x_0}) & \frac{d}{dt}(x_{y_0}) \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ \frac{d}{dt}(y_{x_0}) & \frac{d}{dt}(y_{y_0}) \end{vmatrix} \quad (2.39)$$

En interchangeant pour les deux matrices du membre de droite l'ordre des dérivées temporelles et spatiales, par exemple $d/dt(x_{x_0}) = \partial \dot{x}/\partial x_0 = \partial u/\partial x_0 = u_x x_{x_0} + u_y y_{x_0}$, on obtient finalement :

$$\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}(x_{x_0}) & \frac{d}{dt}(x_{y_0}) \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} = u_x \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ \frac{d}{dt}(y_{x_0}) & \frac{d}{dt}(y_{y_0}) \end{vmatrix} = v_x \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix} + v_y \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix}.$$

et l'expression de l'équation de continuité devient :

$$\frac{dJ}{dt} = u_x J + v_y J = J \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (2.40)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, le jacobien est alors constant et est égal à sa valeur initiale :

$$J = \begin{vmatrix} x_{x_0} & x_{y_0} \\ y_{x_0} & y_{y_0} \end{vmatrix}_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Dans le repère lagrangien, l'équation de la couche limite sous forme adimensionnelle s'exprime par :

$$u_t = U_t + U U_x + D^2 u$$

où u_t est la dérivée lagrangienne de la vitesse, U la vitesse de convection de l'écoulement externe et D est l'opérateur de la dérivée eulérienne, qui est transformé en fonction des variables lagrangiennes :

$$\frac{d}{dy} = \left(x_{y_0} \frac{\partial}{\partial x_0} - x_{y_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \right),$$

ce qui permet d'obtenir l'équation entièrement développée suivante (Shen, 1978) :

$$\begin{aligned} u_t = U_t + U U_x + x_{y_0}^2 + u_{y_0 y_0} - 2x_{x_0} x_{y_0} u_{x_0 y_0} + x_{y_0}^2 u_{x_0 x_0} - x_{x_0} u_{x_0} x_{y_0 y_0} \\ + (x_{x_0} u_{y_0} + x_{y_0} u_{x_0}) x_{x_0 y_0} - x_{y_0} u_{y_0} x_{x_0 x_0}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

L'équation (2.41) n'est fonction que de la vitesse parallèle à la paroi et est donc découplée de la composante transverse de la vitesse. Ceci permet de simplifier considérablement la résolution des équations. Par exemple, au temps t_0 , pour chacune des particules (ou position initiale) i situées en (x_{i0}, y_{i0}) , la composante parallèle à la paroi $x_i(x_0, y_0, t_0 + \tau)$ est déterminée à l'aide de l'équation (2.41) et des conditions initiales :

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad u = u(x_0, y_0).$$

Ensuite la composante normale de la position, soit les coordonnées $y_i(x_0, y_0, t_0 + \tau)$ sont déterminées en intégrant la courbe à x constant de la paroi jusqu'aux coordonnées initiales (x_{i0}, y_{i0}) . En fait, cette courbe peut s'exprimer par l'équation :

$$f(x, y) = x - K = 0, \quad (2.42)$$

où K est une constante. Les dérivées curvilignes des composantes x et y sur cette courbe s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial x}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds}, \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{\partial y}{\partial x_0} \frac{dx_0}{ds} + \frac{\partial y}{\partial y_0} \frac{dy_0}{ds}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

en fonction des coordonnées initiales x_0 et y_0 . À l'aide des équations (2.43) et de l'expression du déterminant du jacobien pour un fluide incompressible ($x_{x_0}y_{y_0} - y_{x_0}x_{y_0} = 1$), on peut déterminer que

$$\frac{dy}{ds} = - \frac{\frac{\partial x_0}{\partial s}}{\frac{\partial y_0}{\partial s}}. \quad (2.44)$$

Sachant que la dérivée curviligne de $\partial x_0/\partial s$ et $\partial y_0/\partial s$ sont :

$$\frac{\partial x_0}{\partial s} = \frac{-f_{y_0}}{\sqrt{f_{x_0}^2 + f_{y_0}^2}} = \frac{-x_{y_0}}{\sqrt{x_{x_0}^2 + x_{y_0}^2}}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial y_0}{\partial s} = \frac{f_{x_0}}{\sqrt{f_{x_0}^2 + f_{y_0}^2}} = \frac{x_{x_0}}{\sqrt{x_{x_0}^2 + x_{y_0}^2}}, \quad (2.46)$$

où f est l'équation de la courbe définie par (2.42), il est possible de déterminer y , pour chaque position initiale, à l'aide de l'expression suivante (obtenue de la combinaison des Éqs. 2.44 et

2.45) :

$$y(x_0, y_0, t_0 + \tau) = \int_0^{(x_0, y_0)} \frac{ds}{\sqrt{x_{x_0}^2 + x_{y_0}^2}} \quad (2.47)$$

où $ds^2 = dx_0^2 + dy_0^2$.

De l'équation (2.47), on remarque que lorsque la norme du gradient de la composante x ($\sqrt{x_{x_0}^2 + x_{y_0}^2}$) tend vers 0, la position y devient infinie. C'est à la position où cette singularité apparaît qu'est défini le décollement. En fait, le critère établi par Van Dommelen et ses collaborateurs (Shen, 1978; Van Dommelen et Shen, 1980; Cowley *et al.*, 1990) stipule qu'au décollement, le fluide à l'intérieur de la couche limite se contracte dans la direction parallèle à la paroi ce qui entraîne une expansion dans la direction normale. C'est cette expansion soudaine qui force l'écoulement à être éjecté de la paroi. Numériquement, le décollement est détecté lors de la résolution des équations de la couche limite (dans un repère lagrangien) lorsque

$$\frac{\partial x(x_0, y_0, t)}{\partial x_0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial x(x_0, y_0, t)}{\partial y_0} = 0, \quad (2.48)$$

soit lorsque la position x est un point stationnaire.

Haller (2004) démontre qu'une singularité n'apparaît que si les équations de couche limite sont utilisées, car sans l'approximation de couche mince, le changement de vitesse est continuellement dérivable et ne montre aucune singularité. Sears précise en effet que le critère de Van Dommelen est un moyen de savoir quand l'hypothèse de couche limite n'est plus valide, justifiant la présence d'un décollement. On pourra cependant noter que Liu et Wan (1985) ont obtenu une solution exacte des équations de couche limite comportant un décollement sans singularité, reflétant peut-être ici un manque d'universalité du critère de Van Dommelen (2.48). Haller propose alors une méthode lagrangienne alternative qui sera décrite ci-dessous. Néanmoins, cette méthode a permis de déterminer la position du décollement dans plusieurs écoulements bidimensionnels sans résoudre l'équation de Navier–Stokes ainsi que dans des écoulements tridimensionnels obtenus de la résolution de l'équation d'Euler (Stern et Paldor, 1983; Russell et Landahl, 1984; Stuart, 1991; Childress *et al.*, 1989). Elle permet aussi de montrer la puissance des méthodes lagrangiennes puisque la plupart des méthodes eulériennes sont limitées à l'analyse d'écoulements bidimensionnels.

Les résultats sur le décollement présentés sont tous basés sur les équations de la couche limite, valides pour des écoulements à nombre de Reynolds très élevé. Cowley (2001) présente cette situation comme un paradoxe puisque malgré les limitations des hypothèses de couche limite, des comparaisons intéressantes basées sur ces études à $Re \rightarrow \infty$ permettent l'analyse d'écoulements laminares (ou ceux à Re modéré). La méthode de la section suivante, et celle

présentée dans le cadre de cette thèse s'éloignent des équations de la couche limite et peuvent être appliquées indépendamment du régime de l'écoulement.

2.2.2 Équation explicite du profil de décollement

Haller (2004) adopte une toute nouvelle approche du décollement en s'inspirant des systèmes dynamiques. Il définit le profil de décollement comme une ligne matérielle qui attire les particules près de la paroi et les transporte dans l'écoulement. Cette ligne matérielle $\mathcal{M}(t)$, fixée à la paroi au point $x = \gamma$ est présentée à la figure 2.6 et est définie par :

$$x = \gamma + yF(y, t), \quad (2.49)$$

où $F(y, t)$ est un développement de Taylor autour de γ :

$$F(y, t) = f_0 + yf_1 + \frac{1}{2}y^2f_2 + \dots \quad (2.50)$$

L'évaluation de termes f_i d'ordre de plus en plus élevés permet ainsi de représenter la ligne matérielle avec une fidélité croissante.

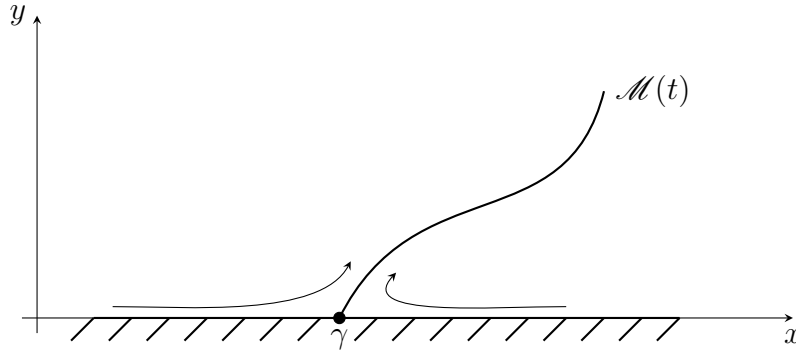


Figure 2.6 Représentation d'une ligne matérielle rattachée à la paroi solide ($y = 0$) au point de décollement $x = \gamma$

Cette définition du décollement comporte plusieurs avantages par rapport aux méthodes eulériennes et lagrangiennes disponibles et présentées à la section 2, par exemple

- l'indépendance du système de coordonnées utilisé ;
- l'analyse d'écoulements à des valeurs de Re fortes ou faibles ;
- l'analyse du comportement instationnaire du profil de décollement.

Une condition sur la ligne matérielle $\mathcal{M}(t)$ peut être obtenue en observant le comportement des lignes matérielles passant par le point de décollement, mais ne coïncidant pas avec le

profil de décollement. En fait, toutes ces lignes situées de part et d'autre de $\mathcal{M}(t)$ convergent vers le profil de décollement en temps positif, car les particules de cette région y sont attirées. Cette caractéristique permet aussi de conclure que toutes ces lignes matérielles $\mathcal{P}(t) \neq \mathcal{M}(t)$ tendent vers la paroi en temps négatif. À l'aide de ces conditions, Haller (2004) établit des équations décrivant le profil de décollement pour des écoulements compressibles instationnaires et les formules analytiques exactes des coefficients f_i sont données jusqu'à $i = 3$. L'équation générale explicite de la pente du profil de décollement est

$$f_0(t) = f_0(t_0) \frac{\rho(t)}{\rho(t_0)} + \rho(t) \int_{t_0}^t \frac{a(\tau)}{\rho(\tau)} d\tau, \quad (2.51)$$

avec la valeur initiale de la tangente

$$f_0(t_0) = \frac{\rho(t_0) \int_0^T \left[\frac{b_y(t) - a_x(t)}{\rho(t)} \int_0^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds + b_x(t) \left(\int_0^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds \right)^2 - \frac{a_y(t)}{\rho^2(t)} \right] dt}{\int_0^T \left[\frac{a_x(t) - b_y(t)}{\rho(t)} - 2b_x(t) \int_0^t \frac{a(s)}{\rho(s)} ds \right] dt}, \quad (2.52)$$

où les coefficients $a(t)$, $b(t)$ sont respectivement $u_y(\gamma, 0, t)$ et $v_y(\gamma, 0, t)$ (ces dérivées sont évaluées au point de décollement $(\gamma, 0)$ et ρ la densité du fluide. On peut s'apercevoir que ces formules ne sont pas faciles à utiliser en pratique.

Nous allons ici tout de même illustrer la démarche utilisée par Haller sur un cas d'écoulement stationnaire incompressible en simplifiant son approche. En dérivant l'équation (2.49) en temps et en remplaçant les expressions de \dot{x} et \dot{y} par leur vitesse respective (Eq. 2.36), on obtient

$$u(x, y, t) = v(x, y, t)F(y, t) + y\dot{F}(y, t) \quad (2.53)$$

Les informations relatives au profil de décollement (point, pente, courbure, etc.) sont obtenues en dérivant successivement l'équation (2.53) par rapport à y . Afin de simplifier la notation, les références aux variables dépendantes sont omises. Il est par contre important de noter que la dérivée est effectuée sur la ligne matérielle $\mathcal{M}(t)$ et donc que x est fonction de y .

La dérivée première de l'équation (2.53) donne alors

$$\begin{aligned} u_x \frac{\partial x}{\partial y} + u_y &= F \left(v_x \frac{\partial x}{\partial y} + v_y \right) + vF_y + \dot{F} + y\dot{F}_y \\ u_x(F + yF_y) + u_y &= F(v_x(F + yF_y) + v_y) + vF_y + \dot{F} + y\dot{F}_y, \end{aligned} \quad (2.54)$$

où $\partial x / \partial y = F + yF_y$ (les indices indiquent la direction de dérivation). De la même manière,

l'expression de la dérivée seconde de l'équation (2.53) est

$$\begin{aligned}
& \left(u_{xx} \frac{\partial x}{\partial y} + u_{xy} \right) (F + yF_y) + u_x (F_y + F_y + yF_{yy}) + u_{yx} \frac{\partial x}{\partial y} + u_{yy} = 2FF_y v_x \\
& + F^2 \left(v_{xx} \frac{\partial x}{\partial y} + v_{xy} \right) + \left(v_{xx} \frac{\partial x}{\partial y} + v_{xy} \right) yFF_y + v_x FF_y + v_x yF_y^2 + v_x yFF_{yy} \\
& + F_y v_y + \left(v_{yx} \frac{\partial x}{\partial y} + v_{yy} \right) F + \left(v_x \frac{\partial x}{\partial y} + v_y \right) F_y + vF_{yy} + \dot{F}_y + \dot{F}_y + y\dot{F}_{yy} + F_y v_y.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

En évaluant tous les termes à la paroi solide (où $u = v = 0$ et $y = 0$) et sachant que $v_y = -u_x$, les expressions de la dérivée première et seconde se simplifient considérablement :

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= u_y, \\
2\dot{F}_y &= 3Fu_{xy} + u_{yy}.
\end{aligned}$$

En substituant aux équations précédentes les termes non nuls de F (Eq. 2.50), on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned}
\dot{f}_0 &= u_y \\
2\dot{f}_1 &= 3f_0 u_{xy} + u_{yy}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

En présence d'un écoulement stationnaire, la position du décollement ainsi que la pente sont constantes, ce qui implique que les dérivées temporelles doivent être nulles. En imposant cette condition aux équations (2.56), on retrouve les critères déterminés par Prandtl et Lighthill :

$$\begin{aligned}
u_y &= 0, \\
f_0 &= -\frac{u_{yy}}{3u_{xy}},
\end{aligned} \tag{2.57}$$

soit l'expression du frottement nul et de la pente du profil de décollement exprimée à l'aide de valeurs pariétales (notons qu'ici, la pente est définie par rapport à la normale à la paroi).

Cette méthode, plus directe et intuitive que celles développées plus haut, est intéressante puisqu'elle n'est pas basée sur les équations de la couche limite, comme la méthode eulérienne et lagrangienne de points critiques, et ne nécessite pas la connaissance a priori de la vitesse de convection du point de décollement, comme pour la méthode MRS. Haller fournit des formules similaires pour les écoulements instationnaires et précise que si l'écoulement possède une moyenne temporelle bien définie (écoulement périodique, statistiquement stationnaire, etc.) alors le point de décollement reste fixe, ce qui a été effectivement validé sur des cas

simples. Dans le cas contraire, Haller définit le décollement à partir d'un point mobile à la paroi. L'idée a été approfondie dans Surana *et al.* (2008a) qui étudie le décollement dans les écoulements présentant deux échelles de temps, *c.-à-d.* des écoulements caractérisés par des fluctuations rapides superposées à un écoulement moyen qui change plus lentement. Dans ce cas, les auteurs prédisent que le décollement aura lieu au point où le cisaillement instantané de l'écoulement moyen s'annule à la paroi, ce qui requiert donc d'abord d'extraire cette composante moyenne. Ceci est effectué de façon numérique par des approximations utilisant la méthode des moindres carrés, ou bien par l'utilisation de méthodes de débruitage basées sur les transformées en ondelettes. Nous verrons cependant que cette définition du décollement mobile n'est pas toujours respectée. Or, selon nos observations, le cas du décollement mobile est sans doute le plus répandu, il apparaît donc nécessaire d'approfondir cet aspect et de déterminer une méthode alternative pour détecter le décollement.

2.3 Choix des bases de données

Nous allons dans les chapitres suivants étudier le décollement en lagrangien dans des écoulements plus complexes que ceux répertoriés dans la littérature. En particulier, les dernières théories lagrangiennes n'ont jamais été appliquées aux écoulements tourbillonnaires. Cependant, afin d'étudier des écoulements reproductibles, nous nous sommes dirigés vers des écoulements périodiques. C'est pour cette raison que nous avons naturellement fait le choix d'étudier le décollement derrière un cylindre générant les allées de von Kármán. Or, d'après Haller (2004), si l'écoulement est périodique, le décollement est fixe, ce que nous allons effectivement observer. Il stipule par contre que dans le cas où le décollement apparaît ou disparaît, nous sommes en présence d'un décollement mobile. Un des écoulements connu et largement documenté dans la littérature est celui du jet impactant dans lequel un décollement instationnaire est généré, ce qui est décrit dans ce qui suit.

2.3.1 Description de l'écoulement d'un jet impactant

Le jet impactant, visualisé par Popiel et Trass (1991) avec de l'encre à la figure 2.7, se subdivise en trois zones caractéristiques présentées à la figure 2.8. Ces zones sont :

1. La région initiale caractérisée par le jet rond. Des instabilités sont créées dans la zone de mélange, ce qui entraîne la création de tourbillons en périphérie se convectant à la vitesse du jet.
2. La région intermédiaire caractérisée par l'impact du jet sur la plaque. Ceci a pour effet de modifier le profil de vitesse en amont de la plaque et de créer un point de

stagnation au centre de celle-ci.

3. La dernière région caractérisée par un jet de paroi se déplaçant radialement. Selon la vitesse du jet, la distance entre la buse et la plaque, la dynamique tourbillonnaire de cette région peut devenir très complexe et un décollement du tourbillon principal peut être observé.

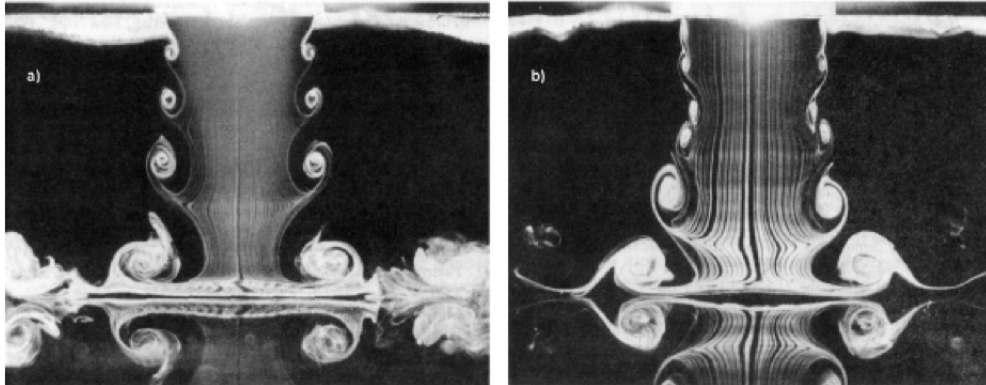


Figure 2.7 Visualisation d'un jet impactant (tirée de Popiel et Trass, 1991)

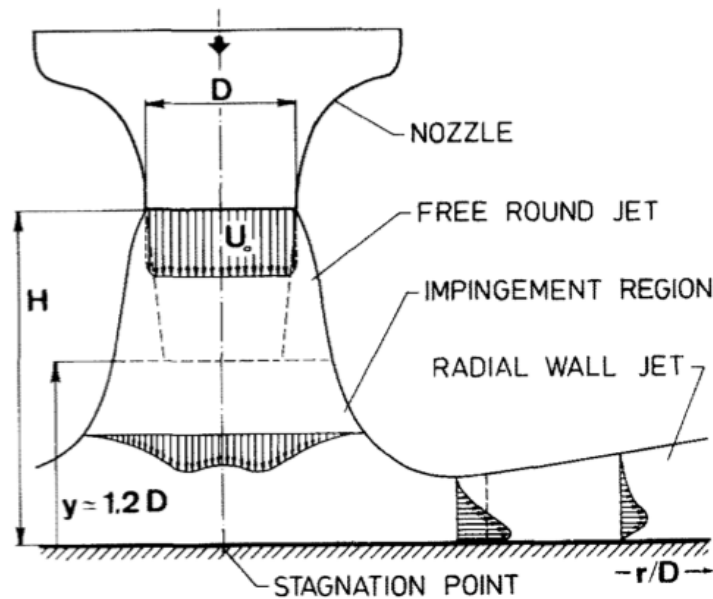


Figure 2.8 Divisions des zones d'un jet impactant (tirée de Popiel et Trass, 1991)

La dynamique tourbillonnaire d'un jet impactant est naturellement beaucoup plus complexe que celle des jets libres. La distance entre la buse et la paroi ainsi que la configuration du ou des jets deviennent aussi des paramètres importants à considérer. En observant indépendamment les trois zones de l'écoulement, il est possible d'établir des équations analytiques

(Schlichting *et al.*, 1968). Cependant, lorsqu'on regarde l'écoulement en entier et surtout lorsque le jet devient turbulent, il est impossible de le définir à l'aide d'une équation analytique. La formation et le rôle des structures des jets turbulents ont fait l'objet de nombreux articles. Dans la zone de développement du jet, la vitesse axiale diminue au profit de la vitesse radiale due à l'effet du cisaillement de la couche limite du jet. Plus l'écoulement s'approche de la paroi, plus la vitesse axiale diminue en raison de la décélération du jet en aval. À l'endroit où le jet impacte avec la paroi se forme un point de stagnation.

La dynamique tourbillonnaire au voisinage de la paroi est illustrée à la figure 2.9. Le tourbillon près de la paroi produit un gradient de pression adverse ce qui a pour effet de décélérer le fluide dans la couche limite (1). Inversement, à l'extérieur de la couche limite, le fluide est accéléré par ce même tourbillon (2). Ceci crée une région de cisaillement intense à la limite de la couche limite (3). C'est cette zone de cisaillement qui est responsable de la modification du profil de vitesse, l'enroulement tourbillonnaire et de la création d'un tourbillon secondaire (4) dont la rotation est opposée à celle du tourbillon primaire. Le jet de paroi résultant est caractérisé par un cisaillement intense et un niveau de turbulence beaucoup plus important que les couches limites habituelles. Dans cette zone, on observe des décollements et recollements instationnaires locaux accompagnés de zones de recirculation près du centre du jet.

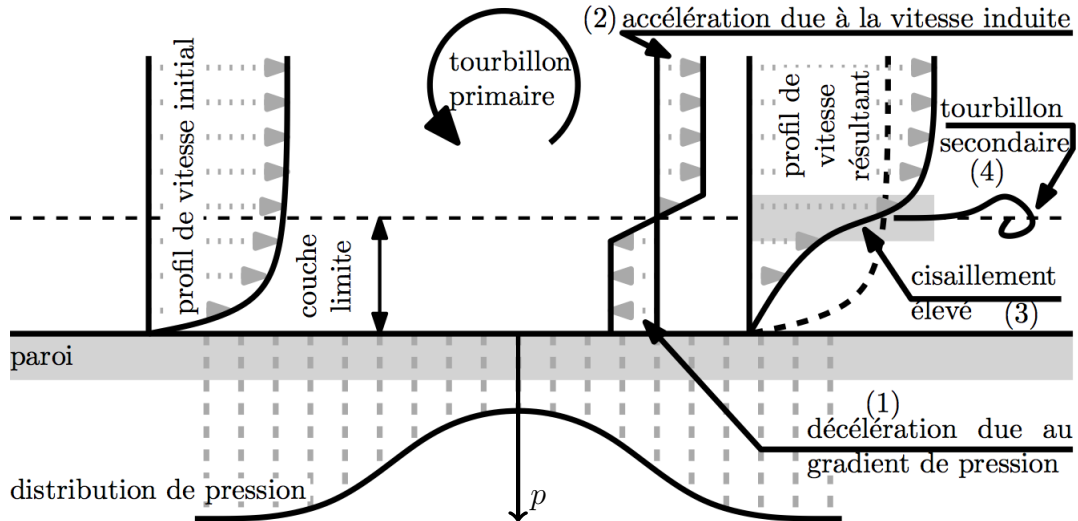


Figure 2.9 Décollement instationnaire et dynamique tourbillonnaire se produisant dans la couche limite à l'impact d'un tourbillon (tirée de Roux, 2011)

2.3.2 Cas d'études

Afin d'étudier le décollement dans le jet impactant, nous nous sommes d'abord focalisés sur des simulations numériques qui fournissent des bases de données complètes et sans erreur. Par la suite, dans le but d'étudier l'applicabilité des méthodes à des champs de vitesse mesurés, un montage permettant de générer le décollement mobile dans un jet impactant a été développé. Par ailleurs, en ajoutant à ce montage un dispositif de pulsation, nous avons pu étudier également l'écoulement d'un anneau tourbillonnaire impactant une paroi, soit une configuration très similaire à celle du jet impactant, dont l'originalité est de présenter deux décollements apparaissant successivement. C'est ce montage expérimental que sera décrit au chapitre suivant.

CHAPITRE 3 APPROCHE EXPÉRIMENTALE ET MÉTHODES NUMÉRIQUES

L'écoulement créé par un jet impactant a reçu une attention considérable en raison de son utilisation dans des procédés industriels et de l'abondance de phénomènes physiques pouvant être étudiés en dépit de sa géométrie plutôt simple. Pourtant, sa compréhension physique est encore incomplète. Paradoxalement, alors que les simulations numériques offrent l'accès à toutes les variables de l'écoulement, il est surprenant de constater que les structures complexes de l'écoulement sont encore trop souvent étudiées avec des méthodes eulériennes classiques et parfois inadéquates comme la visualisation de lignes de courant instantanées (Rani *et al.*, 2007; Violato et Scarano, 2011; Bin *et al.*, 2013). Sur le plan expérimental, la plupart des études portent sur des mesures ponctuelles (Nie et Armaly, 2004), et bien que peu d'entre elles utilisent des techniques de mesure multipoints, les résultats ne sont donc basés que sur des quantités moyennes (Tylli *et al.*, 2002). En conséquence, la validation des modèles numériques reste limitée.

Cette thèse présente une théorie sur le décollement instationnaire qui est validée à l'aide de champs de vitesse issus de données analytiques, expérimentales et numériques. La partie expérimentale a nécessité la fabrication d'un nouveau montage dans notre laboratoire permettant la génération de l'écoulement d'un jet impactant. Cet écoulement simple entraîne à la paroi un décollement créé par la dynamique tourbillonnaire. L'approche numérique, permettant aussi l'obtention des champs de vitesse et l'étude du décollement, sera ensuite développée. Bien que la méthode soit classique, mon travail a aussi permis l'amélioration de ce code maison.

3.1 Montage expérimental et mesures associées

3.1.1 Description du montage

Le montage utilisé au cours de ma thèse a été conçu afin d'étudier la physique d'un jet impactant, décrite à la section précédente, et principalement la dynamique tourbillonnaire se produisant à la paroi. Un schéma simplifié et une vue isométrique de la salle d'expérimentation sont présentés aux figures 3.1 et 3.2. Le montage en boucle fermée est composé de sept éléments principaux, soit (dans le sens de l'écoulement) :

- une pompe ;
- un réservoir d'alimentation ;

- un débitmètre ;
- une valve de contrôle du débit ;
- un réservoir de mesure ;
- un réservoir de retour ;
- et un réservoir de stockage afin de conserver les solutions.

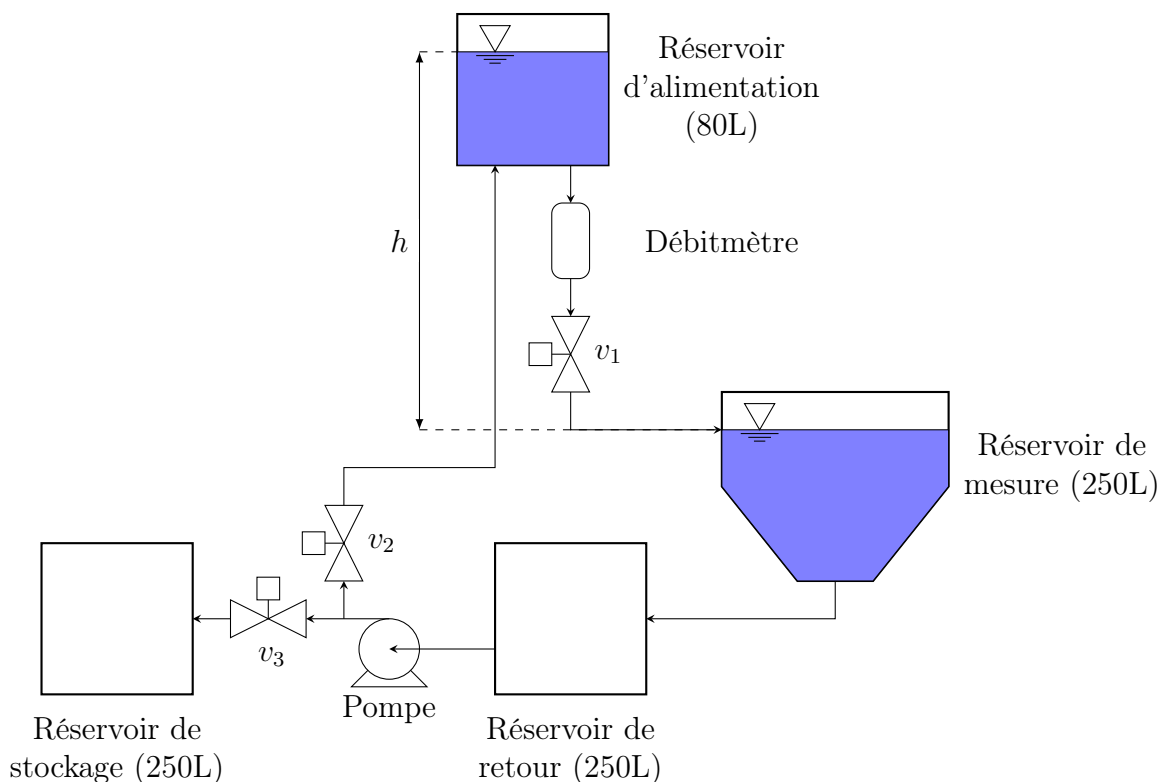


Figure 3.1 Représentation schématique du montage en boucle fermée d'un jet impactant. Les conduites sont en PVC ($D_{in} = 1.25''$) et le débit maximum est d'environ 22 L/min (fixé par la hauteur h et les restrictions du système). La valve v_1 permet d'ajuster le débit de la zone de mesure et les vannes v_2 et v_3 de diriger le fluide vers le réservoir d'alimentation ou le réservoir de stockage

Puisque le fluide circule en boucle fermée dans le montage, il est important d'isoler la pompe, positionnée à la suite du réservoir de retour, de la zone de mesure. Pour ce faire, le réservoir d'alimentation est composé de deux subdivisions comportant chacune une surface libre permettant d'isoler l'entrée et la sortie du réservoir et d'atténuer les perturbations de la pompe dans l'écoulement de sortie. Ce réservoir est positionné le plus haut possible pour atteindre des vitesses d'écoulement les plus élevées possible sous l'effet de la gravité. De plus, la hauteur de la surface libre de ce réservoir est fixée par le tuyau de sortie, ce qui permet de conserver une colonne d'eau constante durant les essais.

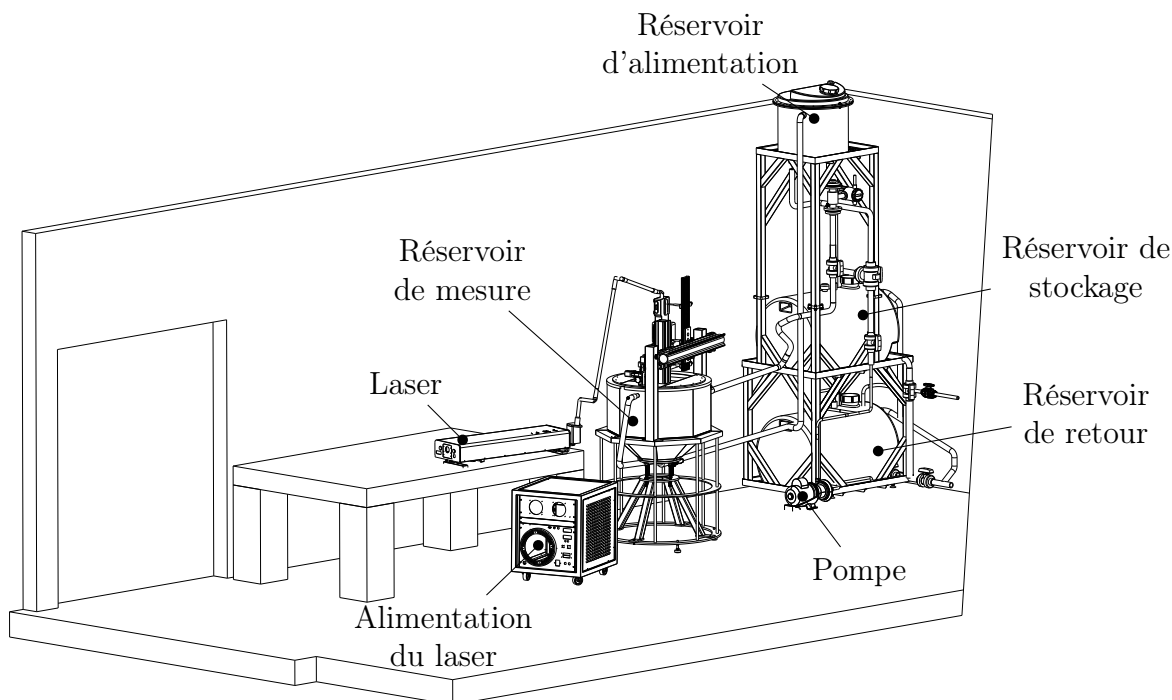


Figure 3.2 Vue isométrique du montage du jet impactant dans la salle dédiée du laboratoire. Les différentes composantes sont identifiées sur la figure. Le montage est imposant et utilise au maximum l'élévation disponible au laboratoire

Un débitmètre et une valve de restriction sont installés sous le réservoir d'alimentation, ce qui permet le contrôle précis du débit, d'en assurer un écoulement constant et de pouvoir observer des phénomènes se produisant à des nombres de Reynolds plus faibles. Le réservoir de mesure a la forme d'un octogone afin de mesurer l'écoulement sous différents angles tout en limitant les déformations dues au changement d'indice de réfraction entre l'acrylique et l'eau. Ces déformations sont en fait minimales lorsque l'observateur est positionné perpendiculairement à la surface.

Le réservoir de retour permet de récupérer le fluide à la suite de son passage dans la zone de mesure et d'alimenter la pompe. Un réservoir de stockage est relié en parallèle par un système de valves (voir Figs. 3.1 et 3.2) afin d'entreposer des solutions après les séances de mesures tout en ayant la possibilité d'utiliser le reste du montage en boucle fermée.

La figure 3.3 présente une coupe du réservoir de mesure et des composantes qui y sont rattachées. Premièrement, on remarque le support du réservoir qui permet de soutenir le réservoir de mesure et tous les accessoires. La conduite d'alimentation est soutenue par ce même support et par un anneau métallique encastré sur le côté gauche du réservoir de mesure.

La plaque plane est positionnée perpendiculairement à l'axe du jet et est contrôlée par une table de déplacement. Le système de lentilles permettant de générer le plan (ou le volume) de mesure est fixé sur un rail au-dessus du réservoir de mesure, les autres composantes reliées au système de mesure étant présentées à la figure 3.4.

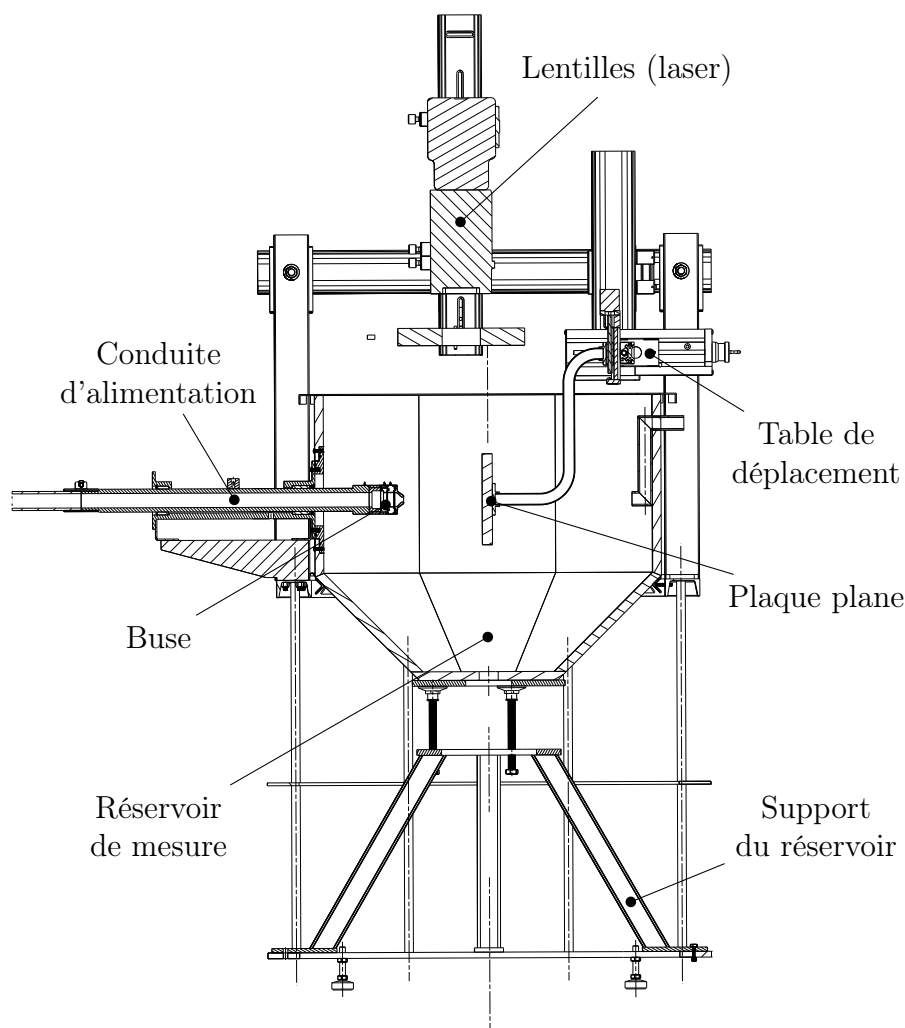


Figure 3.3 Coupe des composantes fixées au réservoir de mesure

La figure 3.4 présente une vue isométrique du montage et du système de mesure de vélocimétrie par image de particules. Le support à caméra est fixé directement sur le support du réservoir. La caméra est positionnée à l'aide d'une table de déplacement qui peut translater sur le support de la caméra. Cet ajustement est nécessaire à l'ajustement de la mise au point sur le champ de mesure en fonction de la zone à étudier et de la lentille utilisée. Le laser (voir aussi Fig 3.2) est connecté à un bras optique, permettant de diriger le faisceau laser jusqu'aux lentilles au-dessus de la zone de mesure. Les articulations de ce dernier comportent

des miroirs à 45° qui modifient et contrôlent la direction du faisceau. Un autre système de lentilles transforme finalement le faisceau en un plan ou un prisme lumineux en fonction des besoins de l'expérimentation.

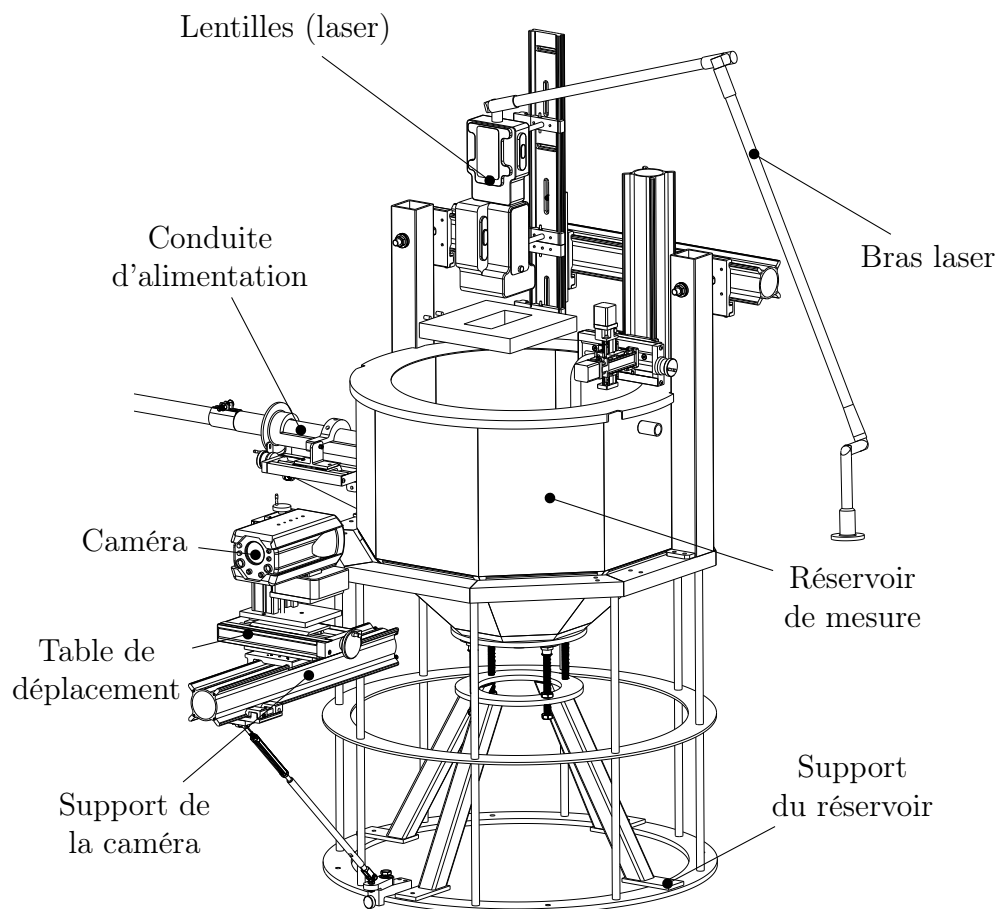


Figure 3.4 Dessin de détail des composantes du réservoir de mesure lors de prise de mesure PIV deux composantes sur un plan parallèle à l'axe du jet

Le montage est conçu afin de fournir un débit maximal constant de 22 L/min vers le réservoir de mesure. Comme le fluide utilisé est de l'eau, le nombre de Reynolds maximal à l'intérieur des tubes (avec un diamètre $D = 3.175$ cm) est ~ 15000 . Dans ce cas critique, le fluide sera assurément turbulent à l'intérieur des conduites puisque la valeur critique de la transition vers la turbulence se situe autour de $Re = 2300$. Dans le cadre de cette étude, afin de minimiser le niveau de turbulence à la sortie de la buse, les mesures ont été effectuées avec des vitesses beaucoup plus faibles de l'ordre de 1 L/min.

La buse, positionnée à la fin de la conduite d'alimentation, est un convergent qui accélère le fluide et diminue ainsi le taux de turbulence. Ce dernier est caractérisé par un rapport des

diamètres d'entrée (D_{in}) et de sortie (D_{out}) de 3.125. Ceci permet d'obtenir un nombre de Reynolds maximal en sortie ~ 47000 .

3.1.2 Vélocimétrie par image de particules (PIV)

La PIV est une méthode expérimentale permettant d'estimer la vitesse d'un écoulement par l'analyse d'images de particules ensemencées. Cette méthode est une des seules à fournir des champs de vecteurs instantanés la rendant particulièrement adaptée à l'étude des écoulements instationnaires. Un montage PIV typique est composé d'un laser, d'une caméra et d'un ordinateur permettant la synchronisation lors de l'acquisition, comme illustré à la figure 3.5.

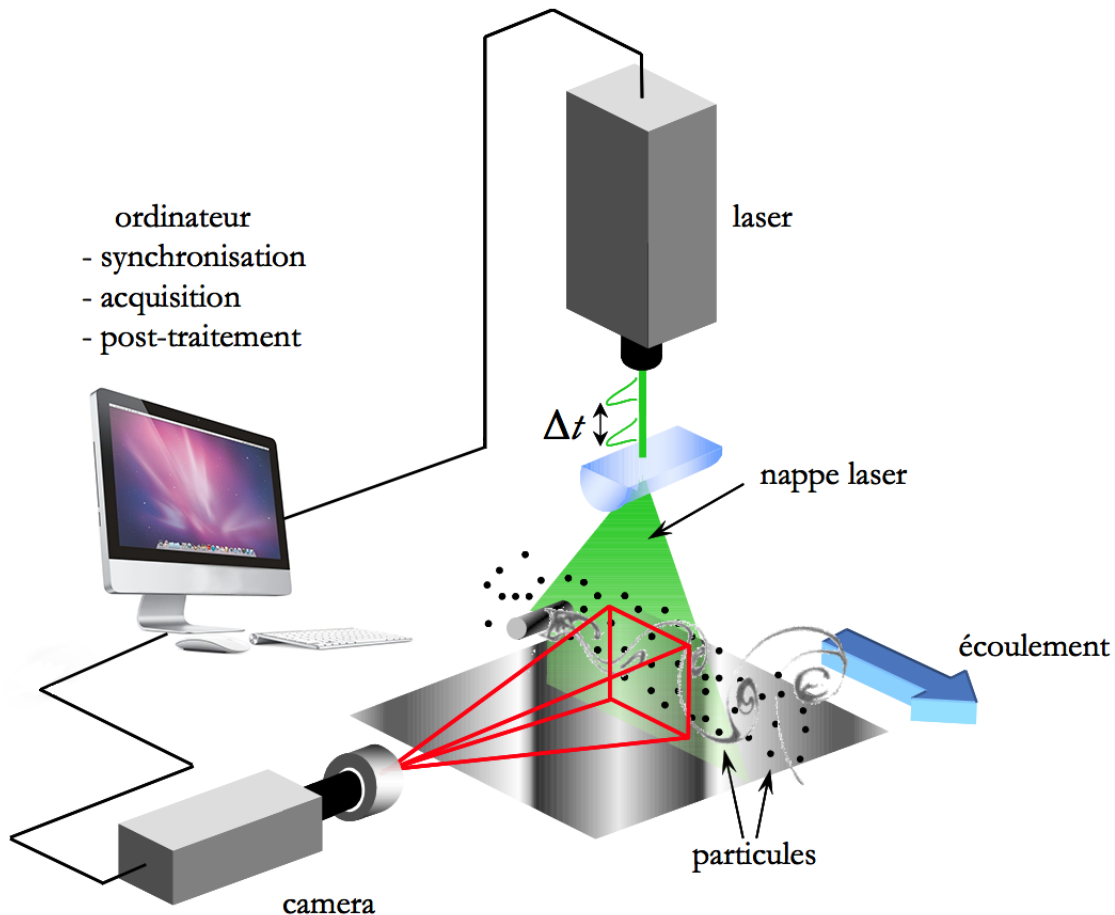


Figure 3.5 Éléments d'un montage PIV (Tirée de Vétel, 2008)

L'évaluation du champ de vitesse en fonction du déplacement des particules s'effectue en cinq étapes principales (illustrées schématiquement à la Fig. 3.6) :

1. une paire d'images de particules est capturée à un intervalle temporel Δt ;
2. le calcul de la corrélation bidimensionnelle entre les deux images ;
3. la détection du pic de corrélation le plus important ;
4. l'interpolation précise de la position du pic de corrélation ;
5. la détermination de l'amplitude et la direction de la vitesse.

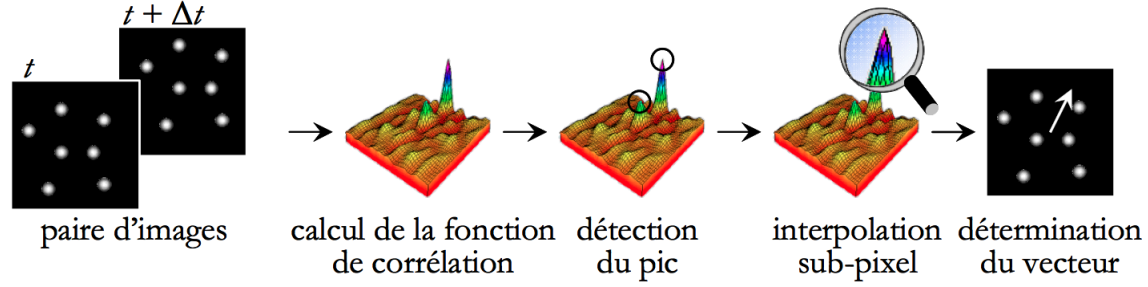


Figure 3.6 Corrélation à partir d'une paire d'images de particules. Le pic le plus important permettra de déterminer le vecteur de vitesse dans cette sous-zone (Tirée de Vétel, 2008)

La première étape, la photographie de paires d'images de particules, nécessite d'abord d'ensemencer l'écoulement, d'illuminer un plan de mesure par un laser et d'effectuer l'acquisition des images par des caméras numériques. Ces étapes ainsi que l'étape du calcul de la corrélation sont décrites aux prochaines sections.

Particules

Le nombre de Stokes (Stk) est une mesure de la fidélité des particules à suivre les variations de vitesse de l'écoulement :

$$Stk = \frac{t_p u_0}{d_p}, \quad (3.1)$$

où t_p est le temps de réponse des particules, d_p le diamètre des particules et u_0 la vitesse de l'écoulement. Afin de représenter adéquatement le champ de vitesse, le temps de réponse t_p des particules doit être plus rapide que la plus petite échelle temporelle de l'écoulement. Dans le cas contraire, lorsque $Stk \gg 1$, le mouvement des particules est décorrélé de l'écoulement ce qui aura pour conséquence d'altérer la vitesse mesurée plus particulièrement dans les zones où les gradients de vitesse sont importants. Lorsque $Stk \leq 1$, les particules suivent adéquatement le fluide et lorsque $Stk \ll 0.1$, l'erreur est moins de 0.1% (Tropea *et al.*, 2007).

Une autre source d'erreur provient de la différence de densité entre les particules ρ_p et le fluide ρ (Raffel *et al.*, 2007). En supposant que les particules sont de forme sphérique, la loi

de Stokes permet de déterminer la vitesse de sédimentation U_g d'une particule,

$$\mathbf{U}_g = d_p^2 \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} \mathbf{g}$$

soumise à la gravité g dans un fluide de viscosité μ .

Par analogie, cette équation permet d'évaluer l'erreur sur l'estimation de la vitesse U par rapport à la vitesse des particules U_p en présence d'une accélération \mathbf{a} importante dans l'écoulement :

$$\Delta = \mathbf{U} - \mathbf{U}_p = d_p^2 \frac{\rho_p - \rho}{18\mu} \mathbf{a} \quad (3.2)$$

Lorsque $\rho_p \gg \rho$, la vitesse des particules suit une loi exponentielle du type :

$$U_p(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_s}} \right)$$

et se stabilise à la vitesse du fluide environnant après un temps de réponse τ_s défini par :

$$\tau_s = d_p^2 \frac{\rho_p}{18\mu}. \quad (3.3)$$

Il est important de noter que cette estimation n'est valide que pour un écoulement de Stokes, mais permet tout de même de comprendre l'importance du choix des particules. Les données présentées ont toutes été mesurées dans l'eau et les deux types de particules utilisées sont présentés au tableau 3.1.

Tableau 3.1 Caractéristiques principales des deux types de particules utilisées

Matériel	Recouvrement	Masse volumique (g/cm ³)	Diamètre (μm)
Verre (creux)	Couche d'argent	1.1	~ 10
Nylon 12	Aucun	1.01	~ 10

Les mesures dans un liquide peuvent être adéquatement effectuées à l'aide de particules de diamètre $\sim 10 \mu\text{m}$, comparativement aux mesures effectuées dans l'air qui nécessitent l'utilisation de particules plus fines $\sim 1 \mu\text{m}$ qui réagiront rapidement aux fluctuations plus élevées ($\sim 10 \text{ kHz}$).

Les équations 3.2-3.3 montrent que l'erreur et le temps de réponse diminuent en fonction du diamètre des particules, cependant cette diminution limite la quantité de lumière réfléchie. Les particules recouvertes d'une couche d'argent permettent de remédier à ce problème, mais sont souvent un peu plus lourdes (et beaucoup plus dispendieuses!).

Laser

Tel qu'identifié aux sections précédentes, le laser permet d'illuminer les particules circulant dans le fluide et de fixer la position du plan de mesure. Illustré à la figure 3.7, un laser de type Nd-YLF est utilisé. Les deux barres (*rod1* et *rod2*) d'Yttrium-lithium-fluoride dopé au néodyme permettent de générer deux impulsions d'énergie beaucoup plus importantes que les lasers de type Nd-YAG (grenat d'yttrium-aluminium dopé au néodyme) à quelques kHz. Ces impulsions sont émises à une longueur d'onde $\lambda = 1053$ nm, ce qui n'est pas dans le spectre visible. Un des faisceaux est premièrement polarisé (M_p) et un générateur d'harmonique permet de diminuer la longueur d'onde à $\lambda = 526$ nm, ce qui correspond à la couleur verte. La puissance du laser est de 30 mJ (par pulsation) et la fréquence maximale entre deux pulsations de la même cavité est de 1 kHz. À l'aide d'un système de miroirs, les deux faisceaux sont combinés et une fois à l'extérieur de l'enceinte, un bras optique (aussi composé de miroirs) permet de diriger le laser vers la zone de mesure, comme décrit précédemment.

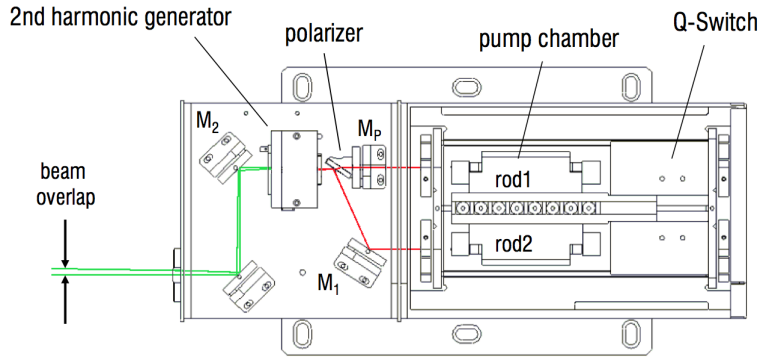
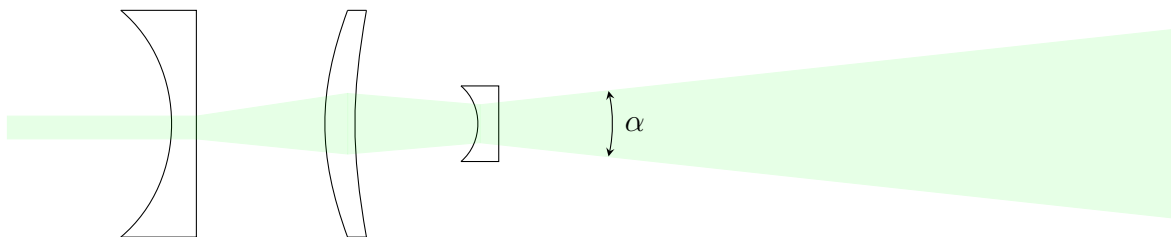


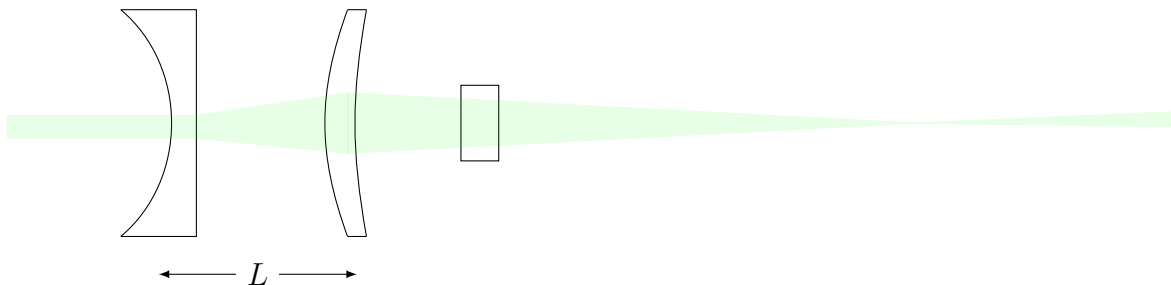
Figure 3.7 Intérieur d'un laser utilisé pour la PIV (Tirée de LaVision, 2012)

Un système de lentilles permet ensuite de transformer le faisceau en une nappe et d'ajuster l'épaisseur et le point focal de la nappe laser. La figure 3.8 présente deux vues du système composé de trois lentilles. La première et la troisième lentilles sont fixes, mais la lentille centrale est mobile (Fig. 3.8*b*). La variation de la distance L entre les deux premières lentilles permet de modifier la longueur focale f de l'ensemble. La zone de mesure est positionnée autour de la zone où l'épaisseur de la nappe laser est minimale, comme présentée à la figure 3.8(*c*). La troisième lentille permet le contrôle de l'angle α , soit l'angle d'ouverture de la nappe laser (Fig. 3.8*a*). Cet angle est fonction de la longueur focale f_d de cette dernière lentille divergente et du diamètre du faisceau d du faisceau laser, et peut être évalué avec $\tan \alpha = d/(2f_d)$.

(a) Vue de côté



(b) Vue de dessus



(c)

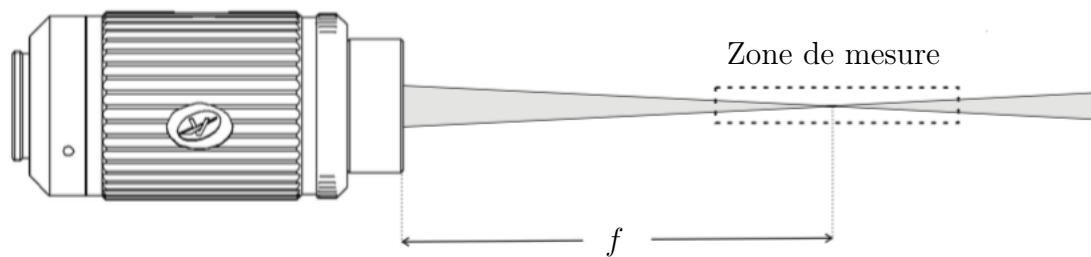


Figure 3.8 Le système de lentilles de la nappe laser est présenté en vue de côté en (a) et en vue de dessus en (b) et (c). La représentation physique du système présentée en (c) est tirée de la fiche technique du fournisseur *Lavision GmbH*. L'angle α est fonction de la longueur focale f_d de la 3^e lentille, qui peut être interchangée, et du diamètre (d) du faisceau laser, $\tan(\alpha) = d/(2f_d)$. La distance focale de l'ensemble (f) est ajustée, afin de diminuer l'épaisseur de la nappe au centre du domaine de mesure, en modifiant la longueur L entre les deux premières lentilles

Acquisition d'images

Les particules sont éclairées à l'aide d'un laser à haute puissance et deux images sont obtenues à l'aide de caméras numériques haute vitesse. L'intervalle temporel Δt entre les deux images est sélectionné en fonction de la vitesse moyenne du phénomène observé. Un système de synchronisation permet le déclenchement d'une cavité du laser et de la caméra (pour chacune des deux images). La figure 3.9 présente les configurations classiques pour la prise de mesures à 2 et 3 composantes de vitesse dans un plan. Durant les mesures à haute vitesse, les images

sont enregistrées sur la mémoire interne de la caméra (8 Go permettant le stockage de 2735 doublets d'images à une résolution de $1280 \text{ px} \times 800 \text{ px}$ et un niveau de gris d'une profondeur de 12 bits par pixel) et transférées vers le disque dur de l'ordinateur à la suite de l'acquisition.

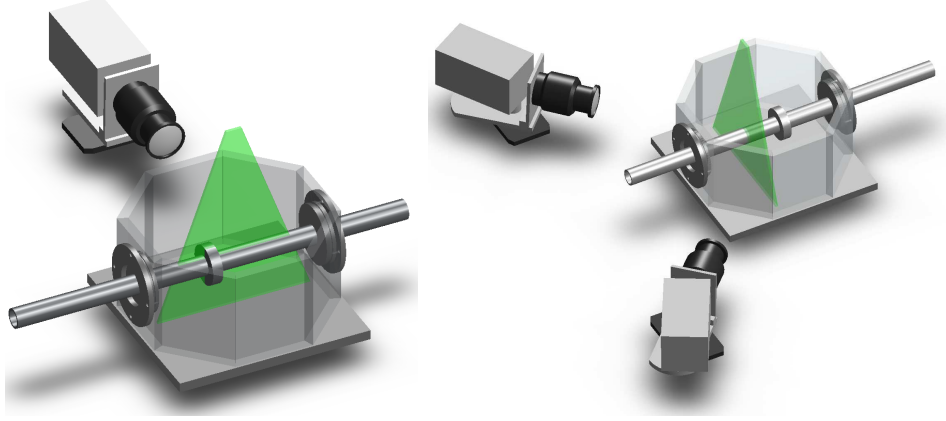


Figure 3.9 Configuration classique de montage PIV dans un plan. Le montage de gauche permet l'évaluation des composantes de la vitesse dans le plan délimité par la nappe laser. L'utilisation de deux caméras permet, en plus de mesurer les composantes dans le plan, l'évaluation de la composante perpendiculaire de la vitesse

Lors de l'utilisation d'une seule caméra, le déplacement d_x , mesuré sur le plan du capteur CMOS, d'une particule située initialement en x_i et se déplaçant à la position finale x_f , est relié au déplacement réel de la particule dans la nappe laser par l'équation suivante (voir la figure 3.10 pour la définition des différents paramètres).

$$x_f - x_i = d_x = -M \left(D_x + D_z \frac{x_f}{z_0} \right) \quad (3.4)$$

avec M le facteur de grossissement de l'objectif. Le signe négatif est dû à l'inversion de l'image au passage des lentilles de la caméra. Suivant la même méthodologie, le déplacement d_y est :

$$y_f - y_i = d_y = -M \left(D_y + D_z \frac{y_f}{z_0} \right) \quad (3.5)$$

Afin d'obtenir les deux composantes de vitesse qui représentent le déplacement des particules dans le plan de mesure (du laser) celui-ci doit être positionné dans le sens de l'écoulement. Les équations (3.4) et (3.5) montrent cependant que l'on effectue une erreur de parallaxe, car le déplacement perpendiculaire à la nappe est aussi pris en compte, et cet effet est d'autant plus grand que l'on s'éloigne du centre de la lentille. En utilisant une nappe laser de faible épaisseur, l'importance du déplacement D_z par rapport aux déplacements principaux dans le plan de mesure (x, y) est diminuée. L'erreur de parallaxe est proportionnelle à l'angle α

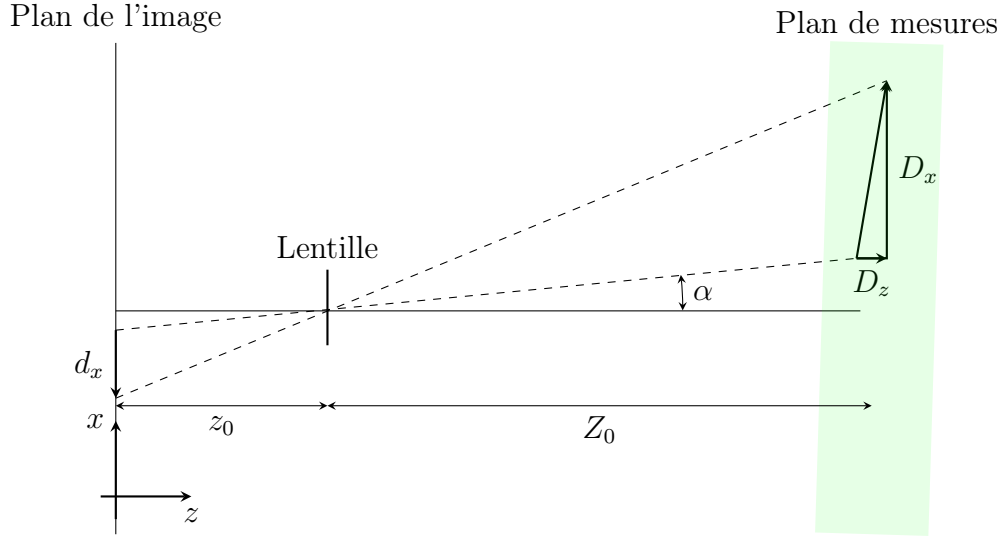


Figure 3.10 Schématisation d'un mouvement d'une particule sur le plan de mesures et sur le plan du capteur de la caméra

(illustré à la Fig. 3.10) :

$$\tan \alpha = \frac{x_i}{z_0} = \frac{-X_i}{Z_0},$$

cette erreur est cependant faible puisque la longueur entre le plan de mesure et l'objectif (Z_0) est d'au moins un ordre de grandeur supérieur à la position initiale de la particule X_i .

Lorsque le mouvement est bidimensionnel (dans la nappe), $D_z = 0$ et d_x (d_y) est directement relié au déplacement D_x (D_y) par le facteur de grossissement de l'objectif M . Cependant, lorsque l'écoulement est tridimensionnel, l'erreur d'approximation peut devenir très importante (plus de 15% Raffel *et al.*, 2007) il est donc crucial dans ces situations d'utiliser un montage stéréoscopique permettant l'évaluation des trois composantes de la vitesse.

La première difficulté d'un montage stéréoscopique consiste à effectuer la mise au point sur un plan qui n'est pas parallèle au plan de l'objectif et au capteur de la caméra. À la fin du 19^e siècle, un photographe autrichien, Theodor Scheimpflug, a été confronté à ce problème lorsqu'il tentait de capturer des paysages à bord d'une montgolfière. Il détermina une condition, portant maintenant son nom, qui nécessite la rotation du plan de l'objectif et du capteur (de la pellicule à l'époque) afin d'obtenir une image nette. Ces plans doivent se croiser en un point \mathcal{S} situé sur le plan de l'image, le principe étant illustré à la figure 3.11.

Une fois la mise au point effectuée sur les deux caméras, le champ de vision est ajusté afin que les caméras observent la même zone. La figure 3.12 permet d'illustrer le principe de

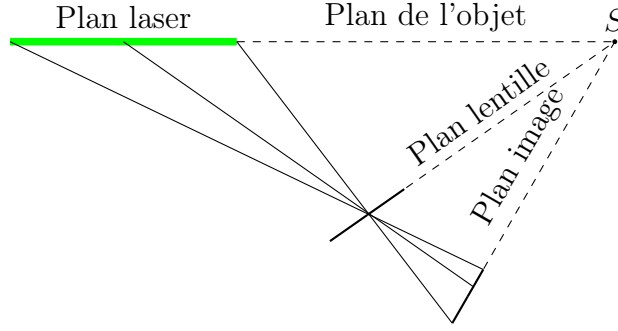


Figure 3.11 Système de déplacement angulaire permettant la rotation de la lentille par rapport au capteur de la caméra (condition de Scheimpflug).

fonctionnement du montage, le déplacement \mathbf{u} d'une particule dans le plan (x, z) , en fonction des angles (α_1, α_2) , correspond aux déplacements $u_1 \neq u_2$ sur chacune des caméras.

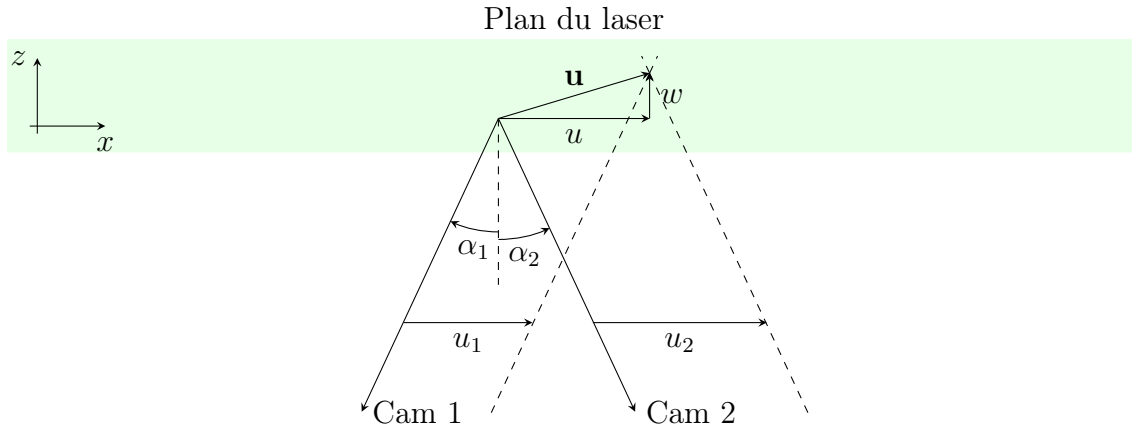


Figure 3.12 Schématisation du fonctionnement d'un montage de PIV stéréoscopique (permettant de mesurer 3 composantes de la vitesse dans un plan)

Le même phénomène se produit dans le plan (y, z) en fonction des angles (β_1, β_2) . L'utilisation d'une calibration est donc nécessaire avant la prise de mesures. En observant à l'aide des caméras une cible de dimensions connues, il est possible de déterminer les angles caractéristiques $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$, ce qui permet de reconstruire les trois composantes de la vitesse (u, v, w) en fonction des quatre angles et des déplacements mesurés sur le capteur à l'aide du

système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u_1 \tan \alpha_2 + u_2 \tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2} \\
 v &= \frac{v_1 \tan \beta_2 + v_2 \tan \beta_2}{\tan \beta_1 + \tan \beta_2} \\
 w &= \frac{u_1 - u_2}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2} \\
 &= \frac{v_1 - v_2}{\tan \beta_1 + \tan \beta_2}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Corrélation

Il est important de noter que les particules ne sont pas suivies individuellement comme la méthode lagrangienne de vélocimétrie par suivi de particules (PTV). Les images en noir et blanc sont représentées par une valeur entière de niveaux de gris par pixel (niveau $\in [0, 2^{12}]$ pour un capteur ayant une précision de 12 bits). L'image est en fait un signal bidimensionnel que l'on subdivise en sous-zones appelées des fenêtres d'interrogation, comme illustré à la partie gauche de la figure 3.6. La grandeur typique de ces fenêtres est de $[32, 32]$ pixels, il y a donc environ 1000 fenêtres d'interrogation par million de pixels du capteur de la caméra. Un vecteur vitesse est calculé par fenêtre d'interrogation, *c.-à-d.* en corrélant le signal de la fenêtre f_{ij} au temps t et celle de la même fenêtre f_{ij} au temps $t + \Delta t$. Naturellement afin d'obtenir une bonne corrélation, le mouvement de toutes les particules à l'intérieur d'une fenêtre doit être sensiblement le même. De plus, il est possible d'utiliser des fenêtres d'interrogation de dimension plus petite ($[24, 24]$ ou même $[16, 16]$ pixels) afin d'augmenter le nombre de vecteurs calculés. Il faut cependant s'assurer que le nombre de particules soit suffisant ($\sim 5 - 10$ particules) à l'intérieur de chacune des fenêtres et que leur déplacement soit plus faible que la dimension de la fenêtre d'interrogation.

Les pics de corrélation permettent de déterminer la vitesse à l'intérieur de cette fenêtre d'interrogation. On effectue cette opération pour chacune des fenêtres d'interrogation. Par exemple, pour une image de 1Mpx, il faut corréler les paires d'images d'environ 1000 fenêtres d'interrogation afin d'obtenir un champ de vitesse complet. Cette opération doit aussi être répétée pour tous les temps de mesure.

La fonction de corrélation de deux signaux $f(x, y)$ et $g(x, y)$ est :

$$R_{fg}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi + x, \zeta + y) g(\xi, \zeta) d\xi d\zeta, \tag{3.7}$$

ce qui, pour une fenêtre d'interrogation de dimension M, N , peut être approximée et calculée

discrètement par :

$$R_{fg}(m, n) = \sum_{i=-M}^M \sum_{j=-N}^N f(i + m, j + n)g(i, j). \quad (3.8)$$

La corrélation de deux signaux permet de déterminer leur dépendance (ou leur indépendance). En fait, la corrélation est un indice de la covariance des signaux et celle-ci est nulle lorsque les signaux sont totalement indépendants. À titre d'exemple, prenons deux signaux unidimensionnels fonctions du temps t , la corrélation croisée de $f(t)$ et $g(t)$, notée $f(t) \star g(t)$, est équivalente à la convolution, notée $f(t) * g(t)$, entre $f(t)$ et $g(-t)$. Ce qui est intéressant avec cette équivalence est qu'il est très rapide de calculer la convolution de signaux dans l'espace de Fourier grâce à un algorithme de FFT.

La transformation de Fourier d'un produit de convolution de deux signaux est en fait la multiplication des transformations de Fourier de chacun des signaux.

$$\mathcal{F}(f(t) * g(t)) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad (3.9)$$

À l'aide de l'équation (3.9) et de l'équivalence entre la corrélation et le produit de convolution, on peut déterminer la corrélation à l'aide de :

$$f(t) \star g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))^* \cdot \mathcal{F}(g(t))), \quad (3.10)$$

où l'exposant $*$ représente le complexe conjugué. Ceci permet de calculer les corrélations sur chacune des fenêtres d'interpolations en effectuant deux FFT, la multiplication de deux vecteurs et une FFT inverse, ce qui est beaucoup plus rapide que les $M \times N$ multiplications effectuées dans l'espace physique en utilisant l'équation (3.8).

La figure 3.13 permet d'illustrer le résultat d'une corrélation. La position et la grosseur des particules à la figure 3.13(a) sont générées aléatoirement et le nombre de particules total est déterminé en fixant la concentration de particules par pixels à 0.05, ce qui correspond à la valeur idéale pour réaliser des mesures PIV. L'intensité d'une particule est maximale au centre et diminue selon une courbe gaussienne, ce qui se rapproche bien de la réalité. Ensuite, la position des particules à la figure 3.13(b) est obtenue en déplaçant uniformément chacune des particules d'une distance $\mathbf{d} = [12, 7]$ pixels. Les coordonnées d'une particule, identifiée aux figures 3.13(a) et (b) par un point rouge, permettent de visualiser ce déplacement. En utilisant l'équation 3.10, on obtient la surface de corrélation présentée à la figure 3.13(c). Le pic de corrélation, situé en $[12, 7]$, permet de déterminer la distance parcourue par les particules et la vitesse en divisant par le Δt entre les deux images.

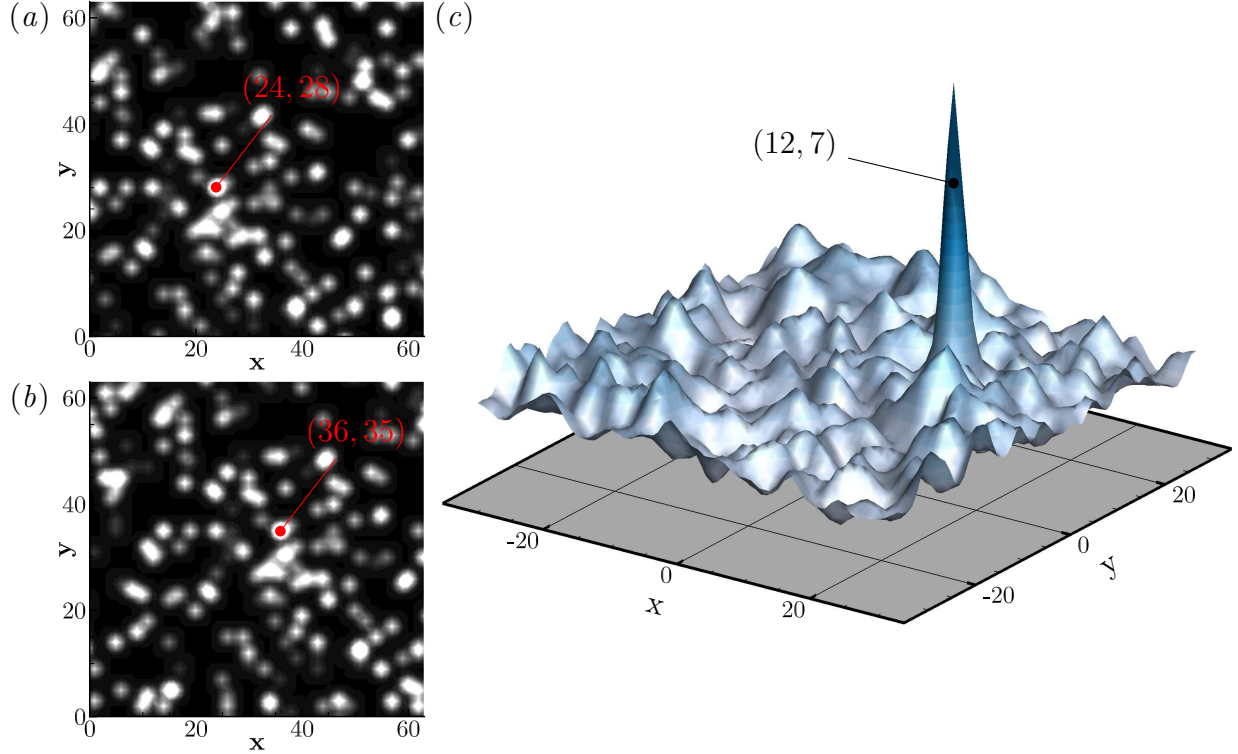


Figure 3.13 Exemple d'une corrélation obtenue par l'équation 3.10. Les images de particules (générées artificiellement) sont déplacées uniformément de $(d_x, d_y) = (12, 7)$ pixels. La coordonnée d'une particule, identifiée par un cercle rouge, est indiquée en (a) et (b). Les coordonnées du pic de corrélation sont indiquées en (c)

Traitements supplémentaires

Tout logiciel de PIV utilise d'autres méthodes afin d'améliorer la précision des résultats et de diminuer le temps de calcul. Lors de prises de mesures, les conditions ne sont naturellement pas toujours idéales, par exemple :

- un mouvement des particules hors de la nappe laser ;
- un mouvement non uniforme des particules à l'intérieur de la fenêtre d'interrogation ;
- une trop faible (forte) concentration de particules dans certaines régions du domaine ;
- un changement de dimension (nombre de pixels sur la caméra) des particules en mouvement ;
- etc.,

et ces conditions nécessitent le développement de méthodes particulières afin d'améliorer la qualité des résultats. Le logiciel utilisé au laboratoire, LaVision (GmbH, 2014), utilise toutes les techniques énumérées ci-dessus.

Premièrement, la valeur maximale de la fonction de corrélation de la surface présentée à la figure 3.13 se trouve au pixel $[12, 7]$. Ceci correspond directement au déplacement des particules puisque le déplacement est un nombre entier de pixels. Lorsque le déplacement n'est pas entier, il est nécessaire d'effectuer une interpolation afin de déterminer plus précisément la position du pic de corrélation. Cette technique est appelée l'interpolation de précision sous-pixel. Illustré à la figure 3.14, la technique consiste à utiliser les valeurs de la corrélation des pixels autour d'un maximum local et de déterminer une surface gaussienne passant par ces points. Il est ensuite possible à l'aide de l'équation de cette surface de déterminer la position précise du maximum. On évalue la fonction de corrélation près du maximum par ce type de surface puisque le profil de lumière réfléchi par les particules est gaussien et la corrélation d'une gaussienne est aussi une gaussienne.

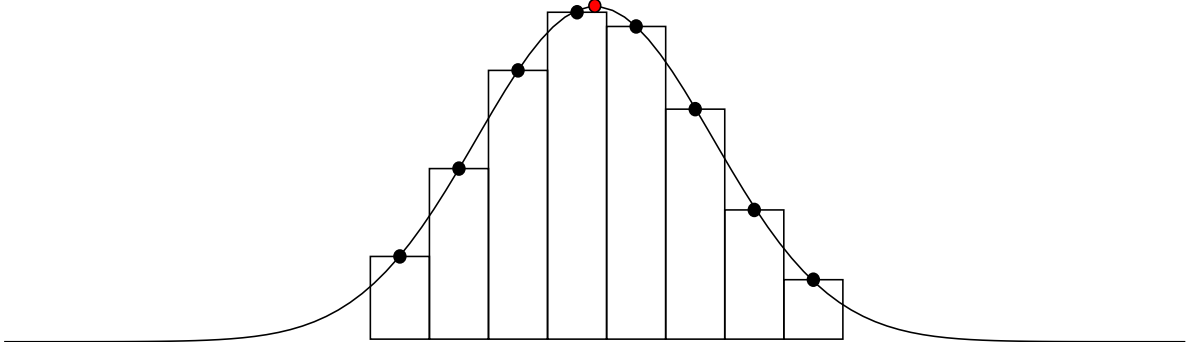


Figure 3.14 Schématisation de la méthode d'interpolation sous-pixel qui permet une évaluation plus précise de la position du pic de corrélation (cercle rouge). Les rectangles et les cercles noirs représentent les valeurs de la corrélation aux entiers de pixels près d'un maximum local de corrélation

Deuxièmement, le calcul des vecteurs est effectué en plusieurs passages. Cela consiste à calculer la corrélation à l'aide d'une fenêtre d'interpolation initiale plus ou moins grande et par la suite, recalculer la corrélation à l'aide de fenêtre d'interpolation plus petite. En utilisant la valeur de déplacement obtenue à l'aide d'une fenêtre de dimension supérieure, il est possible d'identifier plus rapidement la région où se situe le maximum de corrélation. Il est alors favorable pour les passages suivants d'utiliser le calcul de la corrélation discrète (Eq. 3.8) et d'éviter le calcul de transformations de Fourier.

Finalement, plusieurs techniques permettent de réduire les erreurs de corrélation en comparant le déplacement obtenu sur une fenêtre d'interrogation avec celui des fenêtres avoisinantes. Ces techniques permettent, lorsque la surface de corrélation est composée de plusieurs maximums locaux, de sélectionner celui qui minimise l'erreur (ce qui en pratique n'est pas nécessairement au pic de corrélation le plus élevé).

3.1.3 Résultats préliminaires

Note : étant donné que toutes les méthodes utilisées au cours de cette thèse sont basées sur de la cinématique, il n'a pas été utile de convertir les déplacements des particules en vitesses via un étalonnage. Par conséquent, puisque les vitesses en unité SI ne sont pas connues, les déplacements seront présentés en pixels. Nous nous excusons pour ceux qui auraient préféré des unités plus communes.

L'objectif initial de la thèse était d'obtenir un écoulement suffisamment périodique pour le reconstruire en trois dimensions à partir de mesures stéréoscopiques bidimensionnelles et de l'emploi de la moyenne de phase. Nous allons voir que cela n'a pas pu être réalisé. Cette section présente, en condensé, les résultats obtenus à l'aide du montage initial puis les modifications apportées.

Dans les plans de conception initiaux du montage, la buse du jet de diamètre de 1 cm (D_{out}) était reliée par une contraction au tuyau d'alimentation de diamètre interne (D_{in}) de 3.175 cm. Ce rapport de 3.175 est assez faible, mais avait été jugé suffisant pour les applications envisagées.

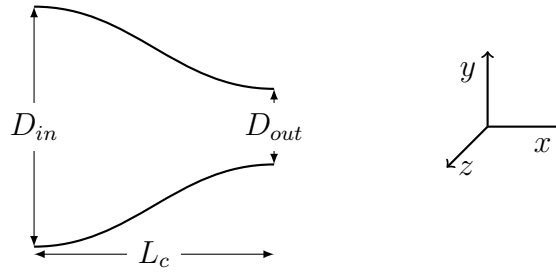


Figure 3.15 Géométrie et longueurs caractéristiques du convergent de la buse

L'utilisation d'un convergent a pour but d'augmenter la vitesse de l'écoulement et de diminuer le taux de turbulence. En observant le profil de vitesse à la sortie du convergent, il est possible d'évaluer la qualité du jet. À la sortie, le profil dans le cône potentiel du jet est plat, ce qui contraste avec le profil de vitesse développé dans un tube long, présenté à la figure 3.16.

Le champ de vitesse du jet initial, moyenné sur près de 8500 champs de vitesse PIV instantanée, est présenté à la figure 3.17. La figure 3.17(a) présente le profil de vitesse à la sortie en fonction de la coordonnée transverse du jet. La vitesse u , dans l'axe du jet, dépasse l'horizontale et forme deux maximum locaux à l'interface entre le jet et la couche de mélange, ce qui ressemble aux mesures présentées à la figure 3.16. Le profil s'arrondit rapidement (Fig. 3.17b) pour devenir parabolique à la figure 3.17(c), soit à moins de $5D$ de la sortie. Cette évolution (voir Fig. 3.17d) est en fait causée par un évasement du jet. Cela entraîne une

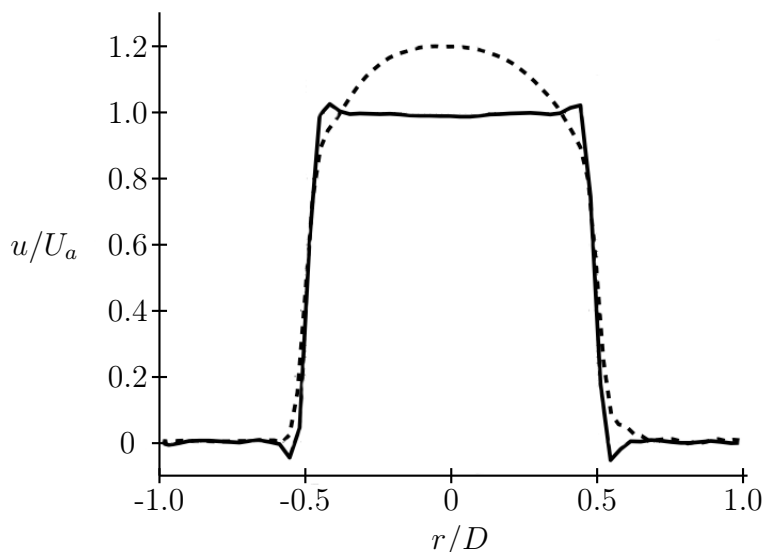


Figure 3.16 Profils de vitesse axiale moyenne dans un tube (ligne pointillée) et à la sortie d'un convergent (ligne pleine). La figure est tirée de Roux (2011) et issue de mesure PIV

diminution considérable de la longueur du cône potentiel. Cette zone devrait être d'environ 4 à 5 diamètres pour un jet libre subsonique (Van Dyke, 1982). De plus, le taux de turbulence à la sortie de la buse, calculé avec la moyenne quadratique de la composante axiale de la vitesse, est de près de 8 %, ce qui est très élevé pour un jet libre où le nombre de Reynolds est d'environ 1500.

Un des autres problèmes du montage initial est la variation du débit (de ± 30 % par heure) ce qui empêche le calcul de moyennes de plusieurs séries d'acquisitions et la reproductibilité des résultats. Plusieurs modifications ont été apportées afin de remédier à ce problème majeur :

- modification apportée au tuyau reliant le réservoir d'alimentation à la zone de mesure afin de conserver une hauteur de la colonne d'eau constante ;
- utilisation d'une valve de restriction plus précise qui permet un meilleur contrôle sur le débit qui entre dans le bassin de mesure ;
- activer le montage plusieurs dizaines de minutes avant les premières mesures afin d'uniformiser la température de la salle et du réservoir de mesure avant l'acquisition de données ;
- améliorer la ventilation de la salle de mesure.

Ces deux derniers points sont très importants puisqu'une différence de quelques degrés de la température ambiante affecte de façon importante la viscosité de l'eau, modifiant ainsi le nombre de Reynolds et du même coup les comportements de l'écoulement. Par exemple, une

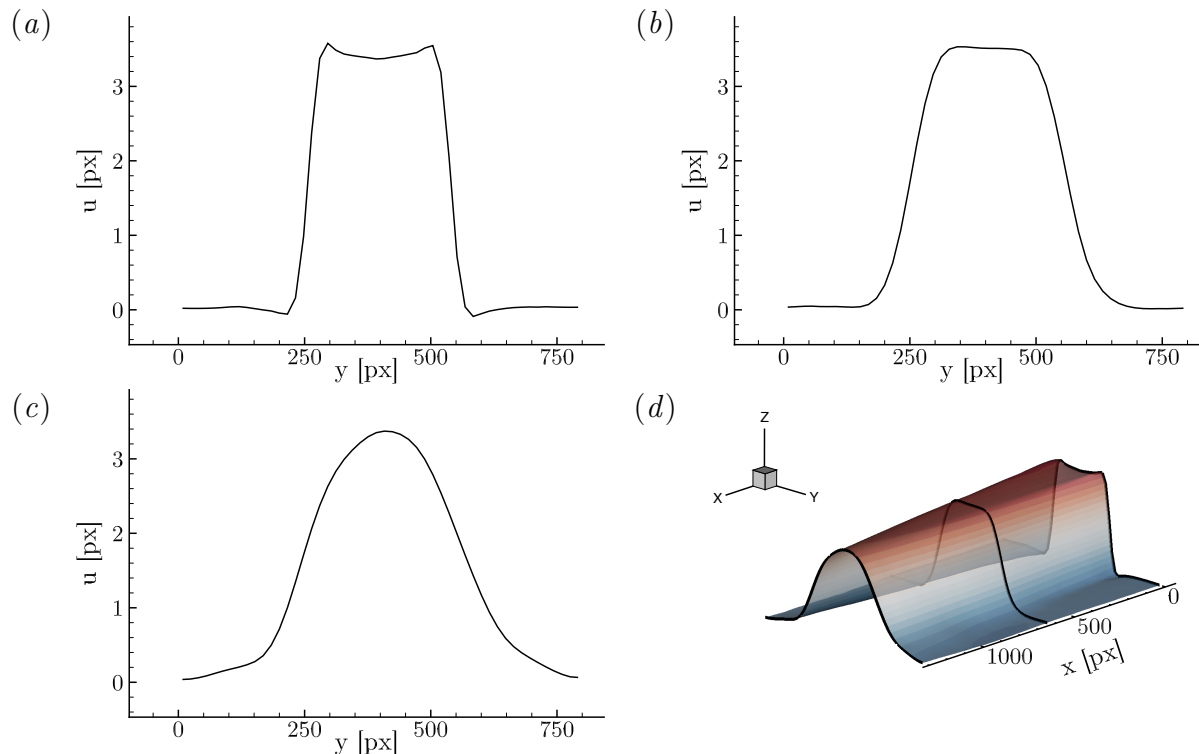


Figure 3.17 Profil de la vitesse axiale u (selon l'axe x) en fonction de y pour différents plans yz . La buse du jet est située à la position $x = 0$. Les profils en (a), (b) et (c) sont extraits de plans yz respectivement positionnés à $x = 8$ px, $x = 608$ px et $x = 1272$ px ($x \in [8 \text{ px}, 1272 \text{ px}]$) et sont présentés par des lignes noires en (d). Finalement, une vue en élévation de la composante de la vitesse u du jet est présentée en (d) permettant de visualiser le développement du profil en contact avec le milieu environnant

variation de 2°C de la température engendre une variation de 8 % de la viscosité et du nombre de Re , lorsque tous les autres paramètres restent constants. L'évolution de la température de l'eau est présentée à la figure 3.18 durant une journée de mesure typique.

Les premières mesures du jet impactant sont présentées à la figure 3.19. Pour cette figure et toutes celles qui suivent dans la thèse, seul un vecteur sur trois est affiché dans chaque direction pour faciliter l'analyse visuelle. La moitié inférieure de l'écoulement (orienté de gauche à droite) y est présentée. La plaque est située à l'extrémité droite de la figure, soit à une distance de 7 diamètres de la buse. Le débit est fixé à 0.9 L/min , soit un nombre de Reynolds du jet à la sortie d'environ 1900. On remarque à la figure 3.19(a), un décollement se produisant au coin inférieur droit. Les contours de vorticité permettent de visualiser le tourbillon primaire, en rotation horaire (bleu), et le tourbillon secondaire, en rotation anti-horaire (rouge), engendré lors du décollement à la paroi. Ce même phénomène se produit de

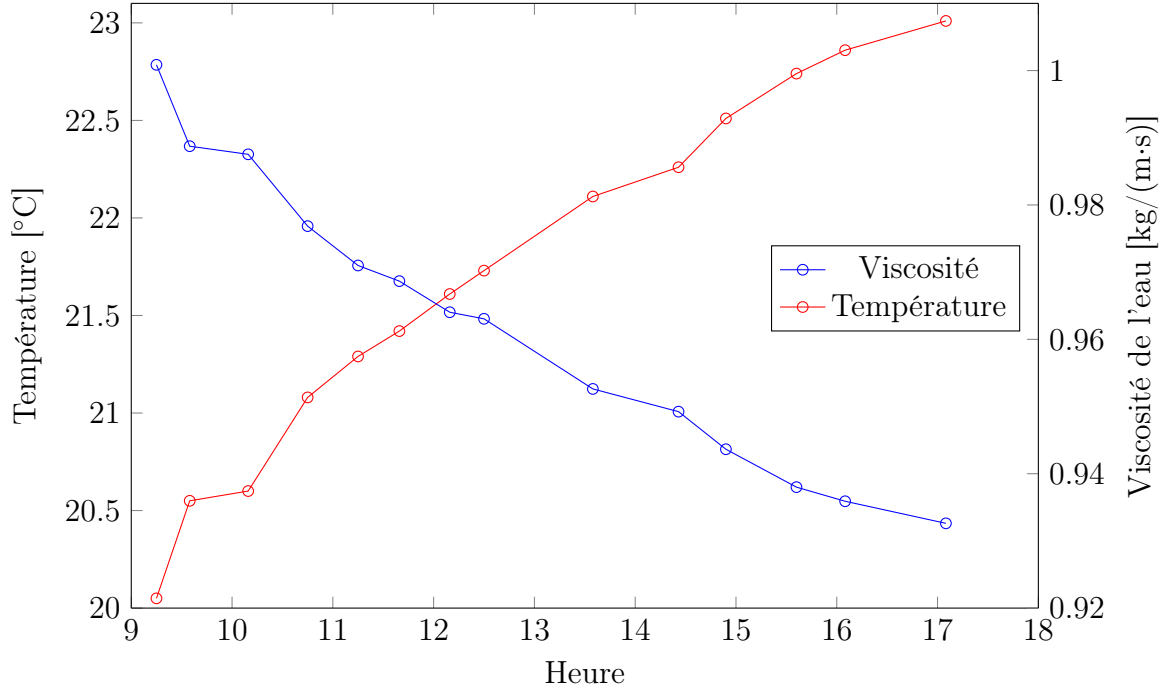


Figure 3.18 Évolution de la température et de la viscosité de l'eau en fonction de l'heure d'une journée de mesure typique

nouveau aux deux instants suivants (Fig. 3.19*b,c*), cependant le décollement ne se produit pas à la même position sur la paroi, ce qui indique que l'écoulement n'est pas naturellement périodique. Deux phénomènes permettent de démontrer le caractère aléatoire de cet écoulement. Premièrement, aux instants subséquents (Figs. 3.19*c-e*) aucun décollement n'est observé. Deuxièmement, la création de tourbillons dans la couche limite du jet n'est pas régulière, ce qui s'observe par la variation de la distance entre deux tourbillons subséquents, par exemple entre les instants des figures 3.19(*d*)-(f). Cette variation de la distance entre deux tourbillons entraîne parfois l'appariement de tourbillons (Fig. 3.19*d*) ce qui entraîne la stagnation des structures près de la paroi et fait obstacle à la formation d'un décollement.

Le faible débit et la distance assez importante entre la buse et la plaque diminuent la grosseur des structures à la paroi. Les prochains résultats présenteront le même écoulement en faisant varier le débit ainsi que la distance entre la plaque et la buse. Cependant, lorsque la plaque est positionnée trop près de la sortie du jet, une partie de la lumière du laser est bloquée par la buse, ce qui diminue la zone pouvant être mesurée par la PIV. Cette limitation ne permet pas la caractérisation d'écoulements où la distance H entre la buse et la paroi est inférieure à 3 diamètres. On remarque à la figure 3.20 qu'un décollement se produit sporadiquement à chacune des différentes configurations, mais encore une fois, le phénomène est très aléatoire.

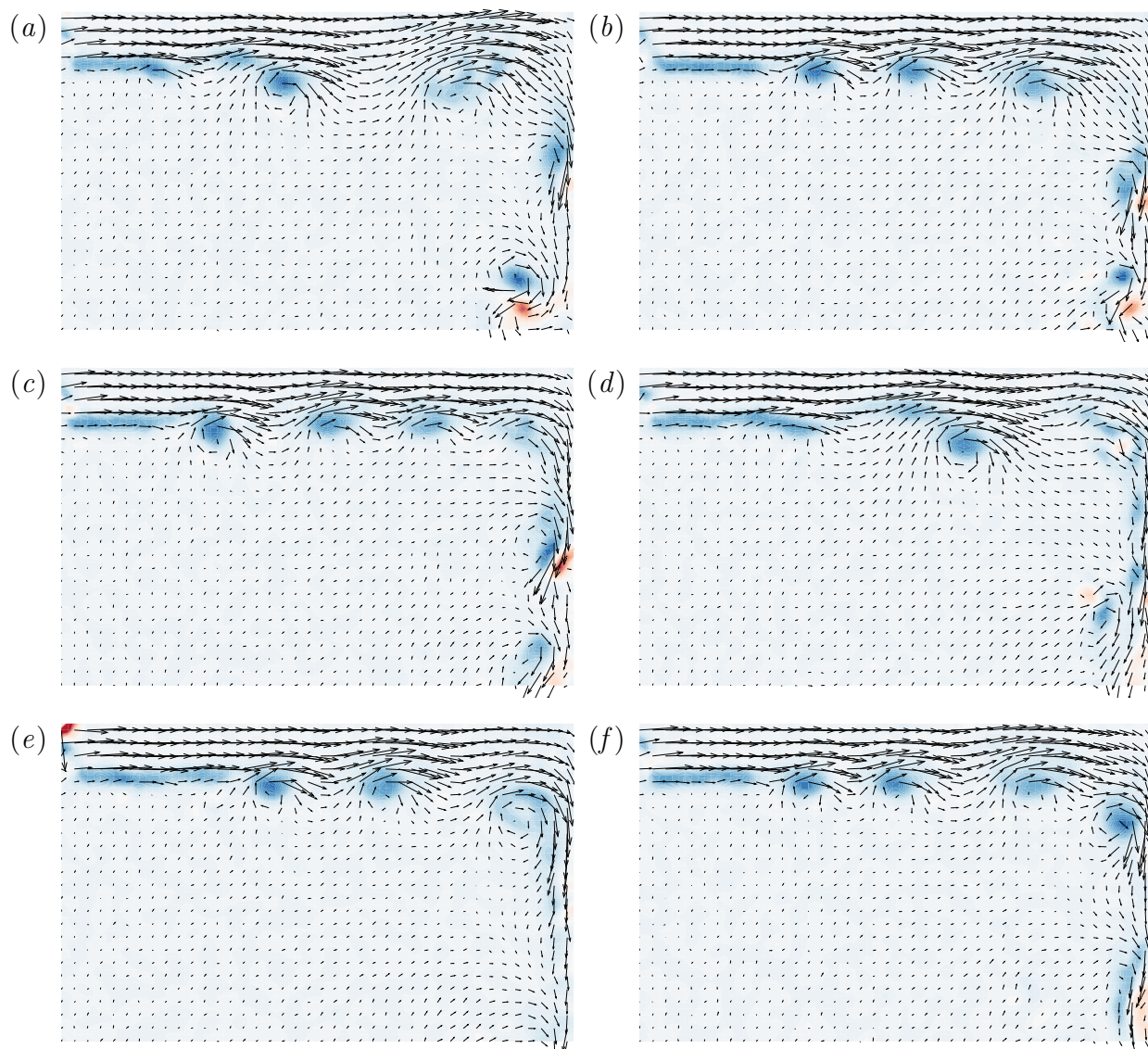


Figure 3.19 Différents instants, séparés d'un Δt constant de 0.11 s, d'une série de mesure PIV d'un jet impactant sur une plaque plane. Le jet est orienté de gauche à droite et la plaque est positionnée à l'extrémité droite des champs de vitesse. Les contours de la vorticité (palette de couleurs du rouge au bleu) sont superposés aux vecteurs vitesse

De plus, on remarque que peu importe la distance entre la plaque et la buse, le décollement se produit à une position similaire près de la paroi. Par exemple aux figures 3.20(c)-(d), malgré l'augmentation de 100 % du débit, les structures ne sont pas considérablement plus grandes. Lorsque le débit est plus élevé (Fig. 3.20d), l'appariement de tourbillons se produit dans la zone où le décollement est observé. Cependant, lorsque le débit est élevé, comme celui

présenté à la figure 3.20(d), le taux de turbulence du jet devient trop important, le nombre de Reynolds à la sortie est de 6340 et celui à l'intérieur du tube d'alimentation est d'environ 2500, ce qui est près de la valeur de transition vers la turbulence des écoulements internes en conduite ($Re = 2300$).

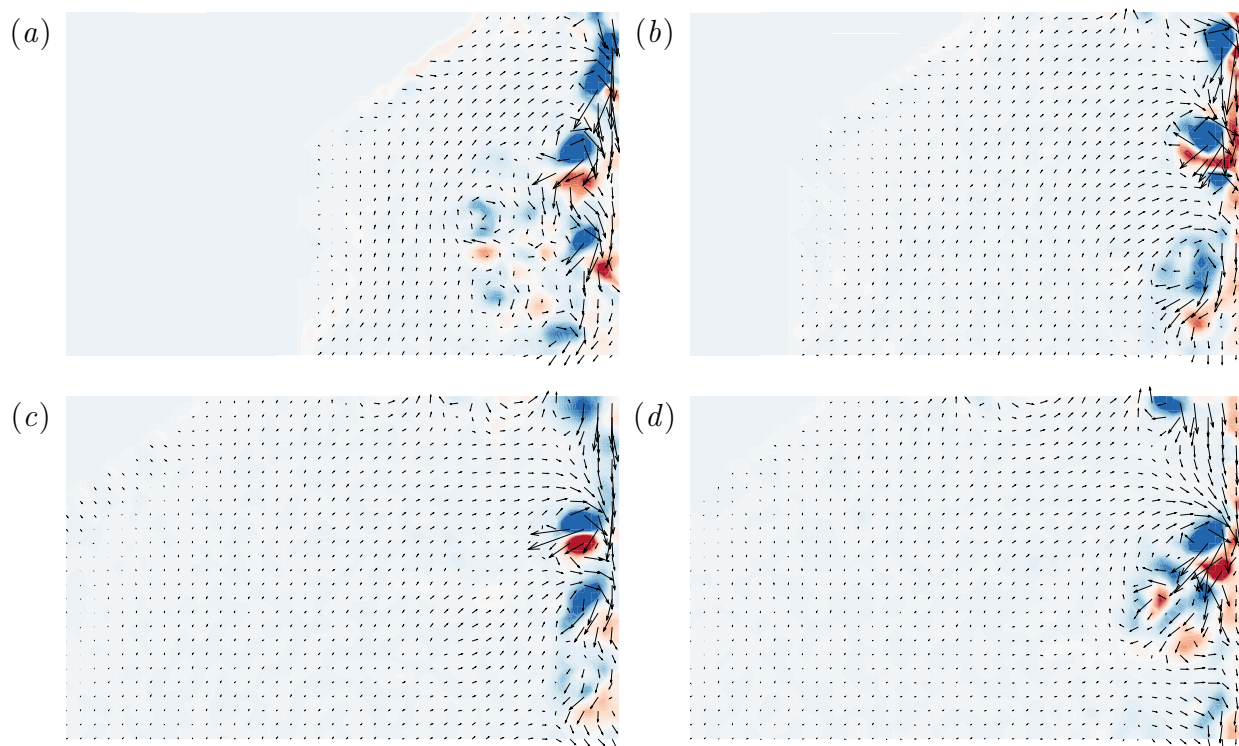


Figure 3.20 En (a), la plaque est positionnée à une distance H de la buse de $1D$ ($H/D = 1$) et le débit est 1.5 L/min. Ensuite en (b), le débit est conservé, mais la plaque est à $H/D = 2$. Finalement, en (c) et en (d) $H/D = 3$ et les débits sont de 1.5 L/min et 3 L/min

Afin d'obtenir un écoulement plus uniforme, il est donc nécessaire de diminuer le débit à l'intérieur du tube d'alimentation afin d'éviter la génération de turbulence.

Modification du montage

Les premiers résultats étaient peu concluants. Des modifications majeures ont été apportées au montage afin d'améliorer l'écoulement en amont de la buse et simultanément, du jet créé dans la zone de mesure.

Un réservoir de repos avec un diamètre de 18 cm et d'un volume d'environ 4 L a été inséré en amont du tuyau qui alimente la zone de mesure. Ce dernier permet une diminution de

la vitesse, une stabilisation de l'écoulement et limite la turbulence dans les conduites. Un système de redresseur d'écoulement, composé de plusieurs pailles de 12 cm de longueur et de 0.5 cm de diamètre, a été inséré dans le réservoir de repos. Un convergent, présenté à la figure 3.21, relie le réservoir aux canalisations en aval.

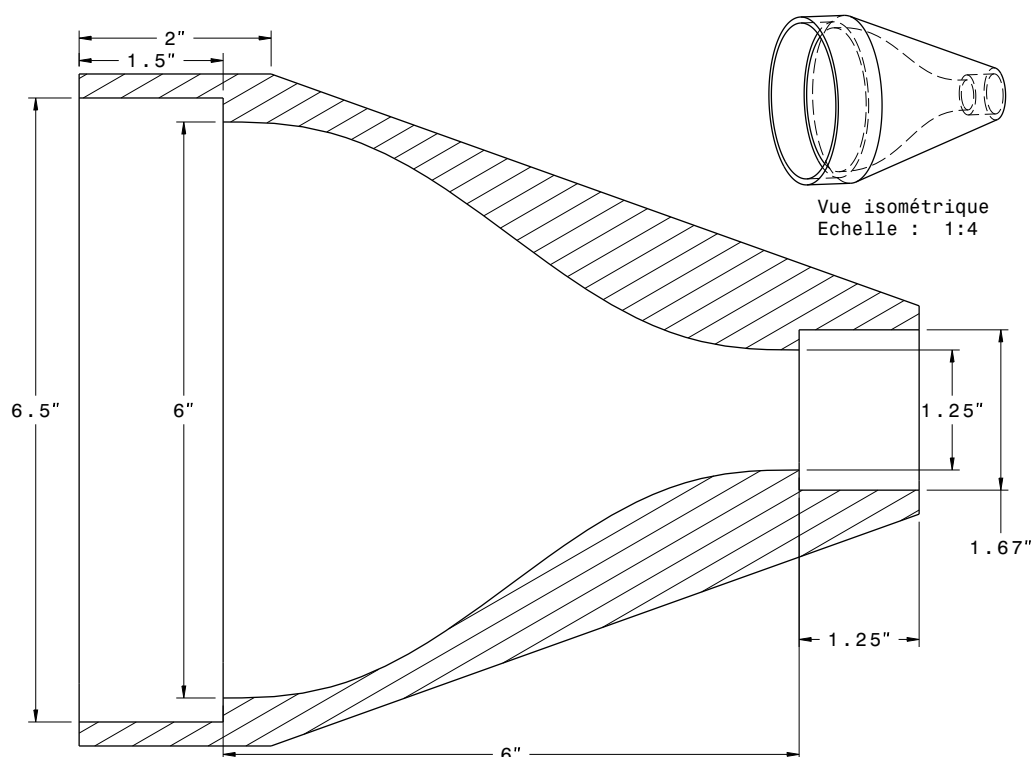


Figure 3.21 Contraction introduite en amont des tuyaux d'alimentation du bassin de mesure. En amont de cette contraction est situé un bassin de repos. Les grandeurs indiquées sont en pouces

La géométrie de la contraction en amont de la buse a aussi reçu des modifications. Dans la littérature (Bell et Mehta, 1988), la longueur de la contraction (L_c) doit être au moins égale au diamètre d'entrée (D_{in}) afin d'obtenir un profil de vitesse plat en sortie et d'éviter les décollements de l'écoulement à l'intérieur de la contraction. Ce critère n'était pas respecté dans le design initial où la longueur était de $0.75D_{in}$. La figure 3.22 présente l'écoulement de sortie d'un convergent en fonction de la longueur de la contraction. Lorsque la contraction est trop courte (Fig. 3.22a), un décollement peut se produire avant la sortie du convergent, ce qui influencera considérablement l'écoulement en aval. À l'opposé, lorsque la contraction est trop longue (Fig. 3.22c), le développement des couches limites est trop important, ce qui contraste avec le profil plat lorsque la longueur est plus adéquate (Fig. 3.22b).

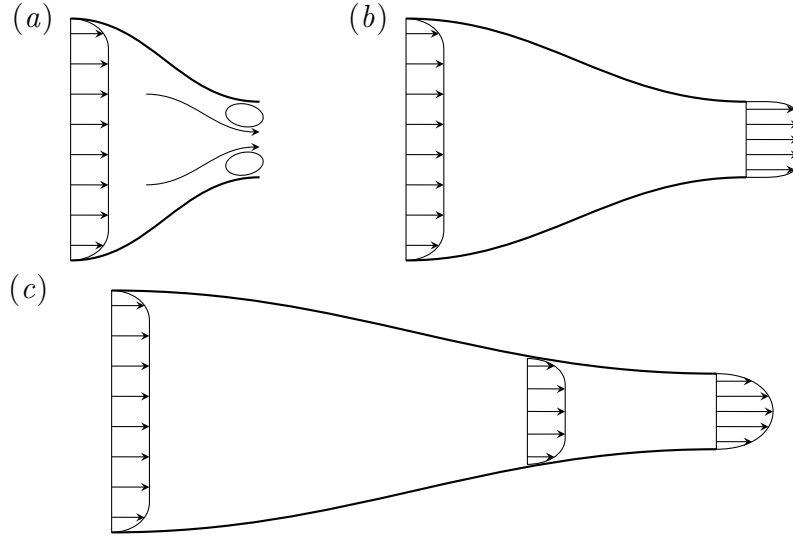


Figure 3.22 Influence de la longueur caractéristique L_c (voir Fig. 3.15) sur l'écoulement en sortie du convergent

En utilisant l'imprimante 3D du département, il a été possible de reproduire un modèle plus allongé, illustré à la figure 3.23. Le profil interne de la contraction est déterminé à l'aide d'une courbe polynomiale d'ordre cinq, soit :

$$y = R_{out} - (R_{out} - R_{in}) \left[6 \left(\frac{x}{L_c} \right)^5 - 15 \left(\frac{x}{L_c} \right)^4 + 10 \left(\frac{x}{L_c} \right)^3 \right], \quad (3.11)$$

où x et y sont respectivement les composantes longitudinales et transverses, R et L_c les rayons et la longueur caractéristiques de la contraction. Les six coefficients permettant la définition de ce polynôme sont déterminés en fixant les deux rayons ainsi que les tangentes et les courbures nulles aux extrémités de la contraction (Bell et Mehta, 1988). Cette courbe permet d'assurer une régularité de l'écoulement et de minimiser les décollements de la couche limite, lorsque L_c est suffisamment grand.

Malgré l'état de surface plus rugueux du modèle imprimé en plastique, par rapport à la pièce usinée en acier inoxydable, la qualité du jet en sortie est supérieure. Présentée à la figure 3.24, la vue en élévation de la composante u permet d'observer l'influence de la contraction. En sortie, les profils des deux jets sont très similaires, le cône potentiel du jet à la sortie de la nouvelle contraction (Fig. 3.24b) est plus long et plus stable. De plus, on remarque que l'évasement du jet est moins important et que le profil est toujours plat à la fin du domaine de mesure.

L'évolution du profil de vitesse en fonction de la distance de la buse est présentée à la

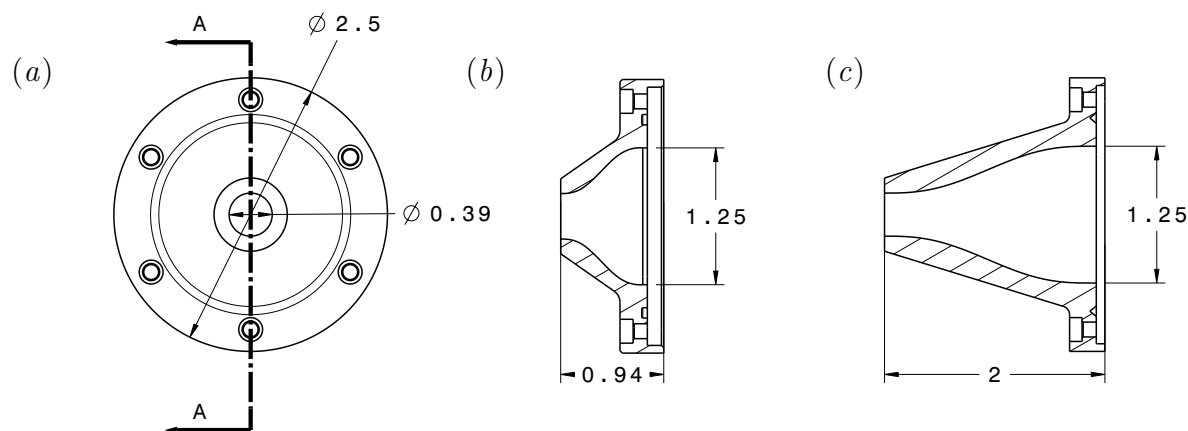


Figure 3.23 Dessin technique de la buse initiale du montage et de la buse fabriquée afin d'améliorer l'écoulement en sortie du jet (les dimensions sont en pouces). Une vue de haut de la buse est présentée en (a), les sept trous permettent de fixer la pièce à l'aide de vis au tuyau d'alimentation. Les coupes A-A présentées en (b)-(c) sont respectivement la pièce initiale et la nouvelle pièce. La longueur caractéristique de la contraction est doublée en conservant les dimensions des diamètres d'entrée et de sortie. Les grandeurs indiquées sont en pouces

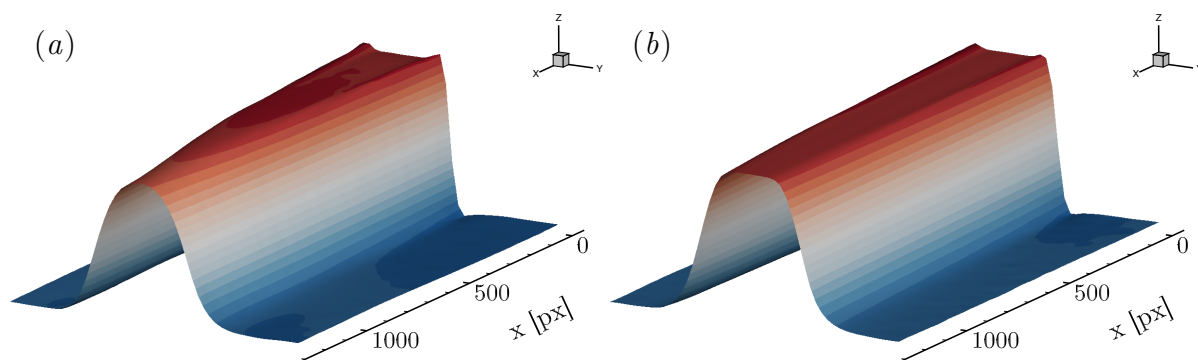


Figure 3.24 Comparaison du profil du jet en sortie du convergent original en (a) et du nouveau convergent en (b). On remarque que le cône potentiel du jet optimisé est préservé sur plusieurs diamètres à la sortie et que le profil est toujours plat à l'extrémité du domaine de mesure

figure 3.25 pour la nouvelle contraction. Il est alors possible de comparer les résultats avec la figure 3.17 qui présente les mêmes données pour le jet en sortie de la contraction initiale. Le jet n'est pas tout à fait symétrique, ce qui est probablement dû à la qualité de l'impression et de l'agencement de la contraction en plastique, du joint d'étanchéité et des pièces métalliques. Cette asymétrie n'est cependant pas critique pour les prochains cas d'étude. En fait, les modifications au montage ont permis de diminuer le taux de turbulence de la composante u

à 1.2 % en sortie du jet, tel qu'illustré à la figure 3.25(a).

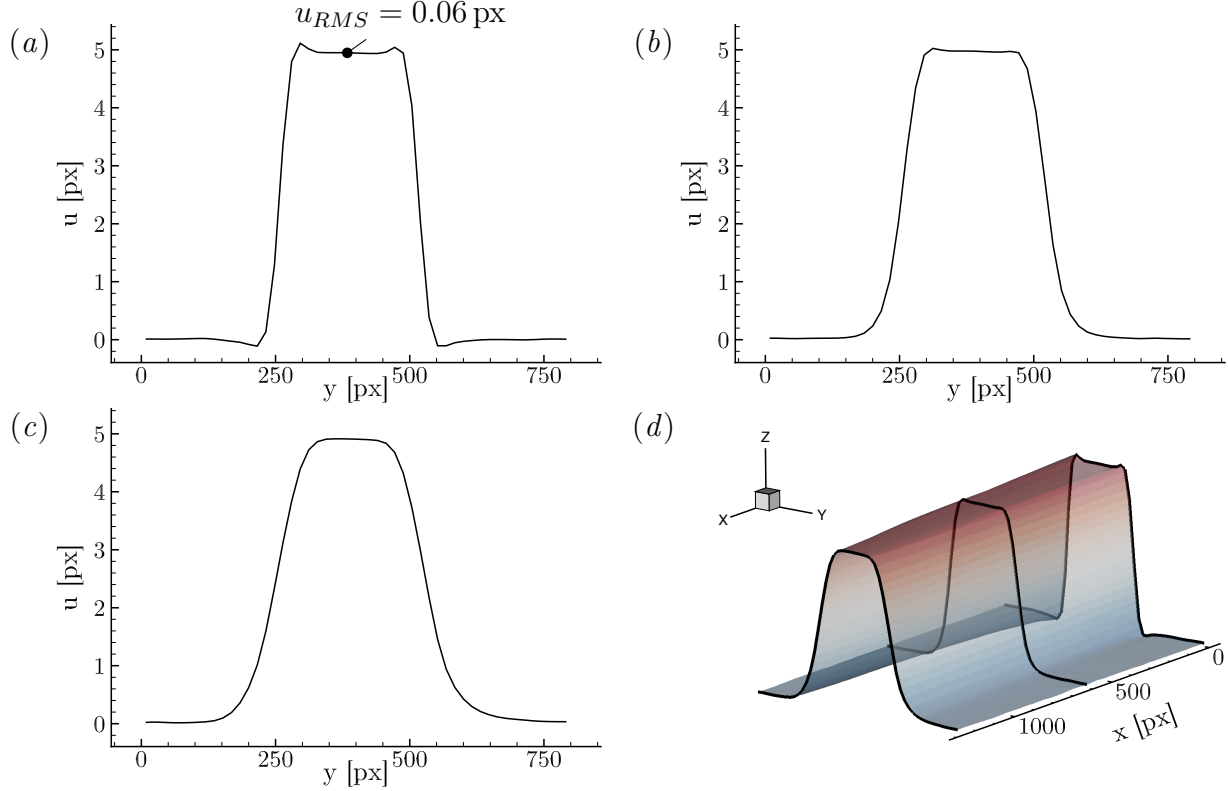


Figure 3.25 Profil de la vitesse axiale u à la sortie de la nouvelle contraction (selon l'axe x) en fonction de y pour différents plans yz . La buse du jet est située à la position $x = 0$. Les profils en (a), (b) et (c) sont extraits de plans yz respectivement positionnés à $x = 8$, $x = 608$ et $x = 1272$ ($x \in [8, 1272]$) et sont présentés par des lignes noires en (d). Finalement, une vue en élévation de la composante de la vitesse u du jet est présentée en (d) permettant de visualiser le développement du profil en contact avec le milieu environnant

Les prochains résultats se concentreront sur des écoulements à plus faible débit, comme l'écoulement du jet impactant et de l'anneau tourbillonnaire présenté au chapitre 6. Des méthodes permettant d'augmenter la dimension des structures de l'écoulement seront également présentées dans les prochaines sous-sections.

Pulsation de l'écoulement

Les liquides sont incompressibles, du moins dans la majorité des nos utilisations quotidiennes, ce qui permet la transmission d'ondes générées à l'aide d'un mécanisme externe, par exemple un piston. L'écoulement ayant alors une période fixe et constante T peut être traité à l'aide de

moyennes de phase, ce qui permet de diminuer le bruit contenu dans les données expérimentales. La moyenne de phase consiste à sommer plusieurs échantillons $f^{(k)}(\mathbf{x}, t)$ afin d'obtenir une moyenne $\bar{f}(\mathbf{x}, t)$ tout en conservant l'instationnarité de l'écoulement :

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^{(k)}(\mathbf{x}, t + kT) \quad t \in [0, T] \quad (3.12)$$

Naturellement, la moyenne est effectuée sur une période, *c.-à-d.* la moyenne de phase conserve la même période que l'écoulement. Cette période peut être basée, par exemple, sur la fréquence naturelle de l'écoulement ou sur un phénomène physique comme la période de détachement des tourbillons.

Afin d'appliquer cette méthode expérimentalement, deux systèmes de pulsations ont été examinés. La première méthode consiste à introduire une vibration dans le système à l'aide d'une plaque d'acier flexible supportant un moteur pas à pas en porte à faux. Une tige est ensuite insérée perpendiculairement dans l'axe principal du moteur, de façon à débalancer sa rotation. L'effet de balourd du système entraîne alors l'oscillation de la plaque d'acier rattachée à un tuyau d'alimentation du montage. Ce montage est simple, mais très polyvalent puisque la modification de la tige, de son positionnement, ou de la rigidité de la plaque d'acier permettent de modifier la force, l'amplitude ainsi que la fréquence naturelle des pulsations. La seconde méthode consiste à utiliser un piston, contrôlé lui aussi par un moteur pas à pas, en amont du convergent. La rotation du moteur dicte la fréquence de la pulsation et le système permet de varier l'amplitude en modifiant la course du piston.

Les deux méthodes comportent des avantages et des inconvénients. Le premier système permet d'imposer des fréquences très élevées de faible amplitude. Inversement, le deuxième système permet d'imposer des oscillations de plus grandes amplitudes, mais est limité à une gamme de fréquences beaucoup plus faibles. Pour les travaux présentés dans le cadre de cette thèse, le système du piston est plus intéressant et approprié à la gamme de vitesse et de fréquences étudiées.

La figure 3.26 présente quatre écoulements de jets libres et forcés (tous fixés à $Re = 1480$ en sortie) mesurés à une fréquence de 200 Hz et soumis à des pulsations de différentes fréquences et amplitudes. La figure 3.26(a) présente celui d'un jet libre sans aucune pulsation externe. Des tourbillons se développent dans la couche de mélange du jet, mais leur fréquence n'est pas tout à fait régulière. On remarque de plus que la grosseur des tourbillons diffère, l'écoulement devient cependant plus régulier lorsqu'il est pulsé. Les jets libres, présentés aux figures 3.26(b)-(c), sont pulsés à une fréquence de 1 Hz avec respectivement une faible et une plus grande amplitude. On remarque dans le cas d'un jet pulsé à l'aide d'une plus grande

amplitude, que les tourbillons sont plus réguliers et conservent leur forme sur de plus longues distances (ce qui s'observe sur tout l'intervalle des mesures et non seulement aux instants présentés à la Fig. 3.26). Ce comportement s'explique par la plus grande perturbation exercée sur le jet, grâce au volume plus important déplacé par le piston. Finalement, présenté à la figure 3.26(d), la vitesse de rotation du piston est augmentée à 2 Hz tout en conservant l'amplitude la plus importante. On remarque l'augmentation de la dimension des tourbillons de la couche de mélange, mais la fréquence d'apparition ne semble pas être significativement modifiée.

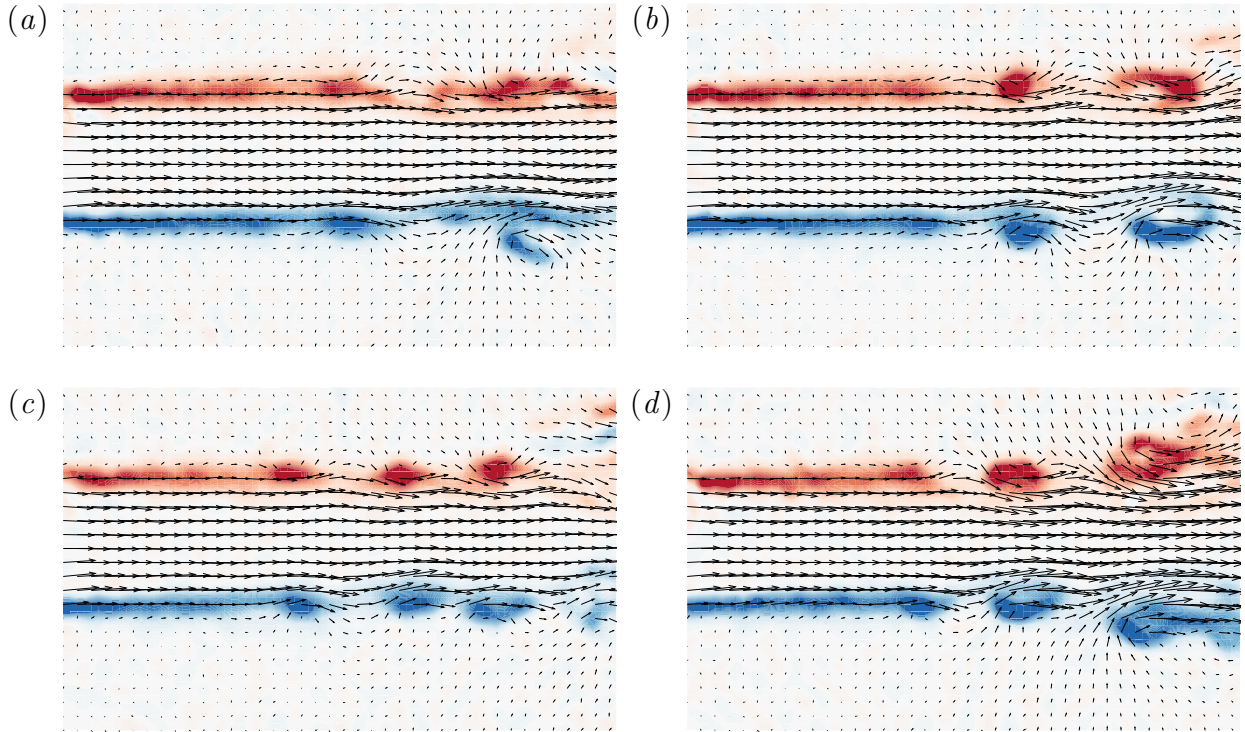


Figure 3.26 Présentation de quatre champs de vitesse de jets libres (a) et forcés superposés sur des contours de la vorticité. En (b) et en (c), le jet est pulsé à une fréquence de 1 Hz selon deux amplitudes distinctes. L'amplitude de la figure (c) est supérieure à celle de la figure (b). Finalement, en (d) la fréquence de pulsation est de 2 Hz en conservant l'amplitude plus importante

Les fréquences impos es à l'aide du piston sont mesur es dans l'écoulement et pr sent es à la figure 3.27. En fait, ces fréquences sont observ es en récupérant des signaux de vitesse dans la couche de mélange des écoulements présentés à la figure 3.26. Lorsque le jet est libre (aucune pulsation), le signal de la vitesse est constant (Fig. 3.27a), et correspond à un déplacement

de particules de 5.6 px. La fréquence naturelle du jet n'est pas apparente puisque l'amplitude des variations est très faible. Aux figures 3.27(b)-(c), la fréquence de 1 Hz imposée se propage et s'observe clairement dans les signaux de vitesse (la période est d'environ 200 échantillons puisque la fréquence d'acquisition est de 200 Hz). De plus, l'augmentation de l'amplitude (Fig. 3.27c) et de la fréquence à 2 Hz (Fig. 3.27d) s'observe dans la couche de mélange du jet.

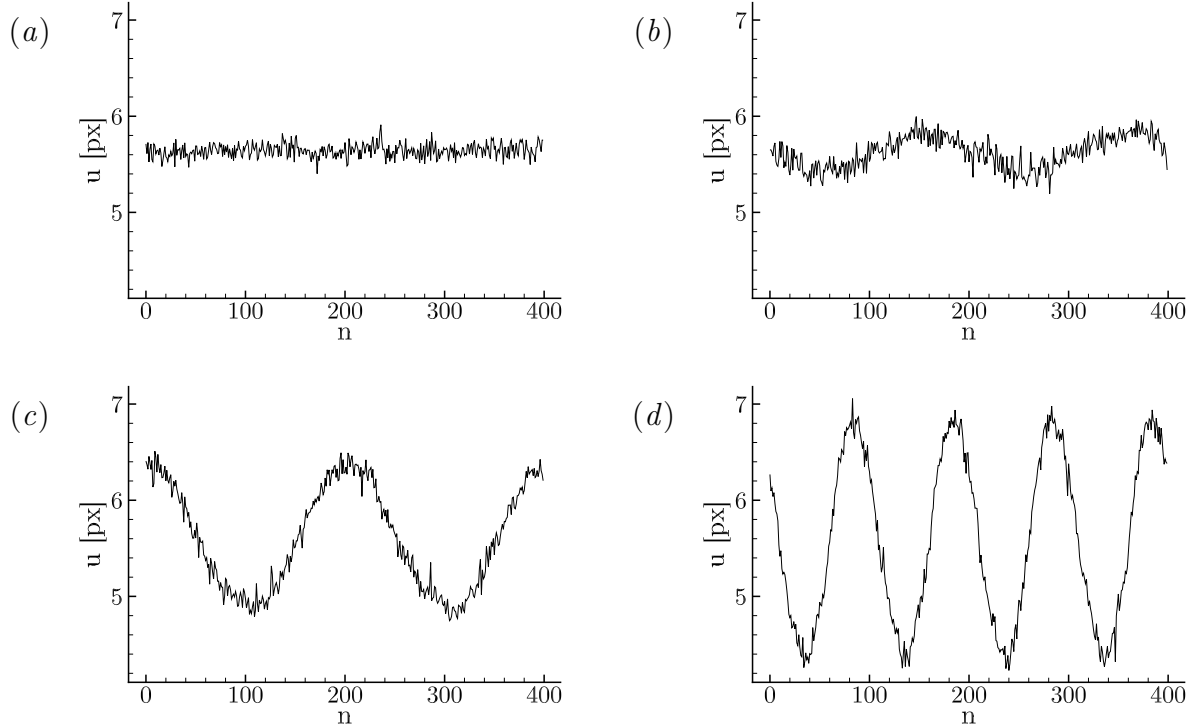


Figure 3.27 Signaux mesurés (à 200 Hz) en fonction du nombre d'échantillons de mesure n dans la couche de mélange du jet pulsé présenté à la figure 3.26. Tout comme à la figure 3.26 en (a), le jet est pulsé à une fréquence de 1 Hz en (b) et en (c) où l'amplitude est augmentée et finalement à une fréquence de 2 Hz en (d) en conservant l'amplitude plus importante

La fréquence naturelle (f) des tourbillons créés dans la couche de mélange d'un jet libre peut être approximée à l'aide d'un nombre adimensionnel décrivant les mécanismes d'oscillation, le nombre de Strouhal :

$$St = \frac{fD}{U_0}. \quad (3.13)$$

Pour un jet libre, la valeur du nombre de Strouhal est approximativement de $St = 0.3$ (Crow et Champagne, 1971). Cependant, plusieurs auteurs ont observé des variations sur cette valeur

en fonction des méthodes de mesure, des installations et de la position où le signal est extrait. La valeur du Strouhal pour un jet libre, selon les différentes études, est en fait comprise entre $St = [0.24, 0.64]$ (voir tableau résumé de Gutmark et Ho, 1983).

Au laboratoire, pour $Re = 1480$, la vitesse caractéristique à la sortie de la buse ($D = 1$ cm) du jet est de $U_0 = 0.15$ m/s. La fréquence naturelle (préférentielle) du jet libre devrait être $f \approx [3.6 \text{ Hz}, 9.6 \text{ Hz}]$. L'évaluation de la fréquence naturelle du jet libre permettra son amplification à l'aide d'un mécanisme externe afin de maximiser les effets sur les structures de l'écoulement. Le jet impactant est présenté à la gauche de la figure 3.28 et le résultat du spectre de Fourier calculé au point illustré par un cercle rouge est indiqué sur la droite. Ce dernier est situé dans la couche de mélange du jet afin de mesurer la fréquence de création des tourbillons. En fonction de l'abscisse du point sélectionné, le spectre varie légèrement, mais la fréquence dominante se situe toujours à 7.61 Hz. (± 0.2 Hz, soit le pas fréquentiel du spectre). Cette fréquence préférentielle correspond à un nombre de Strouhal de 0.51 et est comprise à l'intérieur de l'intervalle prédit pour l'écoulement d'un jet libre.

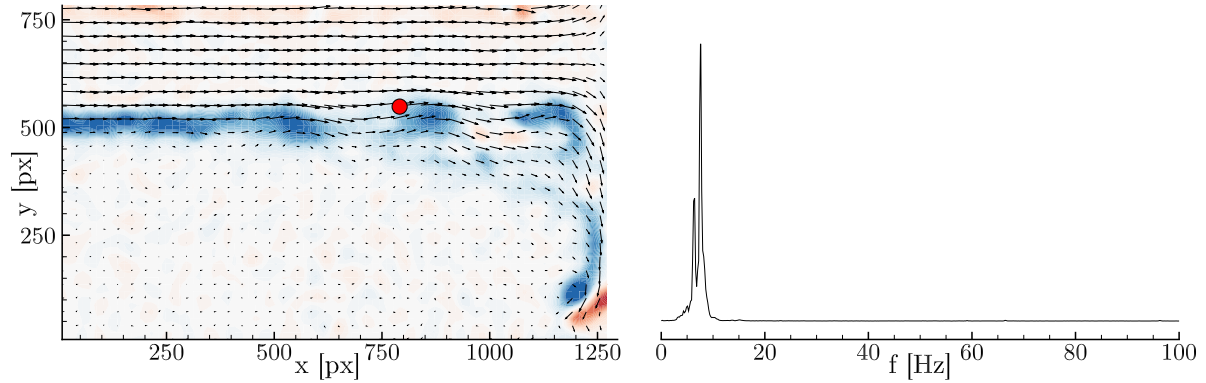


Figure 3.28 Champ de vitesse du jet libre à la gauche accompagné à droite du spectre de Fourier calculé dans la couche de mélange, au point $(x, y) = (792 \text{ px}, 584 \text{ px})$, indiqué par un cercle rouge. Le spectre comporte un maximum à une fréquence $f = 7.61$ Hz pour un pas de représentation fréquentielle de 0.17 Hz

Jet impactant pulsé

Le jet est maintenant pulsé à la fréquence naturelle et impacté sur la plaque à une distance $H/D = 7$, la même distance que lors des mesures présentées à la figure 3.19. L'acquisition est réalisée à 200 Hz et la fréquence imposée est de 7.5 Hz, il y a donc un peu plus de 26 champs de vitesse par période. Les données sont obtenues de la moyenne de phase de cinq acquisitions

de 2738 champs de vitesse (soit le maximum possible avec l'équipement disponible), pour un total de près de 500 périodes de relâche tourbillonnaire. La figure 3.29 présente quatre instants de la moyenne de phase.

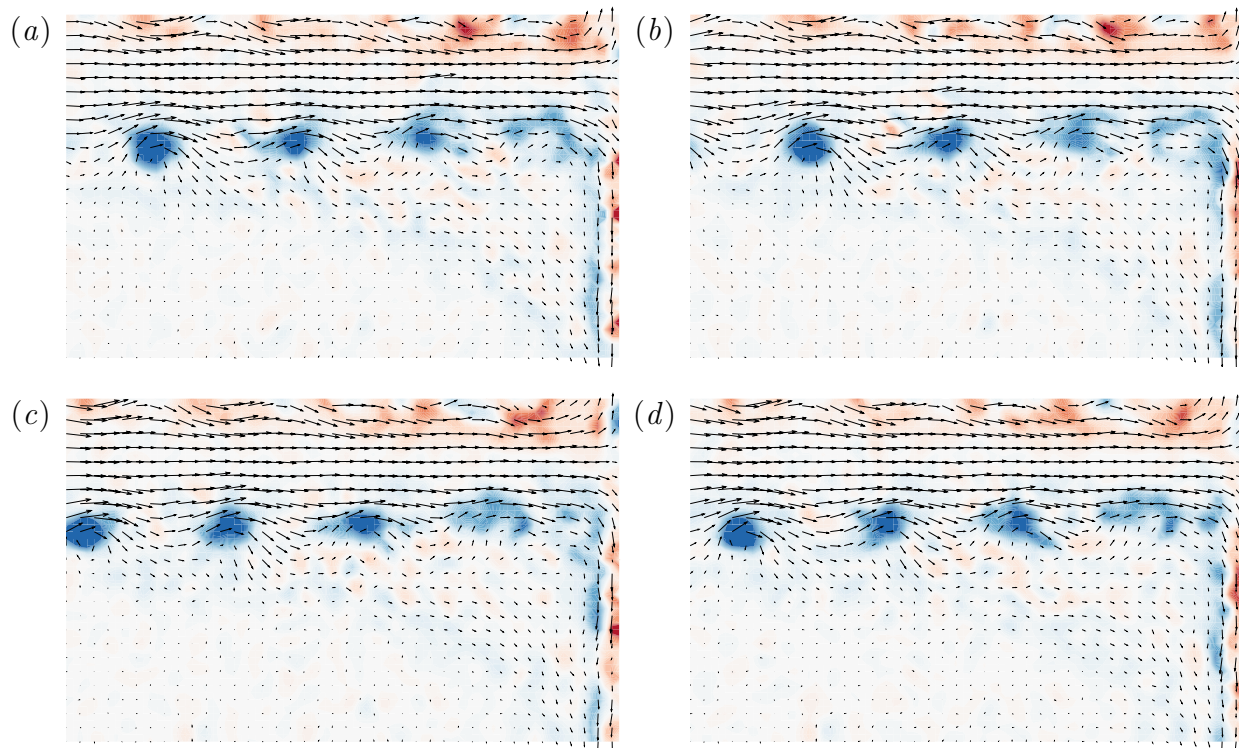


Figure 3.29 Une période d'un jet pulsé. Le temps est constant entre les images et fixé à un quart de période (T) tel que en (a) $t = 0$, en (b) $T = 0.25T$, en (c) $T = 0.5T$ et en (d) $t = T$

L'écoulement résultant est régulier et il y a peu de vecteurs aberrants. La dimension des tourbillons et la distance entre deux tourbillons subséquents sont assez constantes. Cependant, une fois la moyenne de phase calculée, il n'y a aucun décollement visible à la paroi. Le phénomène est en fait aléatoire et ne se produit qu'à environ 15 % des périodes. L'écoulement du jet impactant nécessite un traitement particulier afin d'identifier les zones temporelles où un décollement est présent. Ceci est principalement relié aux instabilités qui sont influencées par plusieurs facteurs externes, difficiles à régulariser et à rendre périodiques. La création de tourbillons se produit dans la couche de mélange et malgré l'introduction d'un mécanisme de pulsation externe, ne se produit jamais de façon totalement régulière. Une légère perturbation (de débit par exemple) entraîne des phénomènes bien différents à la paroi. De plus, les tourbillons subséquents s'influencent mutuellement et empêchent sporadiquement le décollement à la paroi. Certains travaux (Didden et Ho, 1985) utilisent le principe de moyenne

conditionnelle, en sélectionnant des périodes où un phénomène particulier se produit. Cette technique permet d'obtenir de meilleurs champs de vitesse, mais l'écoulement moyen calculé est très différent de l'écoulement moyen réel.

Nous n'avons pas cherché à aller plus loin pour rendre l'écoulement du jet impactant périodique et donc les analyses se feront dans des plans avec des champs instantanés.

Synchronisation du mécanisme de pulsation et des caméras

Dans certains écoulements qui seront analysés au chapitre 6, plusieurs expériences seront moyennées entre elles afin de diminuer l'erreur de mesures aléatoires. Si un mécanisme est utilisé pour pulser l'écoulement, il devient nécessaire de le synchroniser avec l'acquisition PIV, et c'est ce qui est décrit ici.

Le déclenchement de la caméra s'effectue à l'aide d'un microcontrôleur dictant simultanément le déplacement du piston. Puisque ce microcontrôleur (un *Arduino Uno*¹) ne fait que boucler un simple code prédéfini, le niveau de synchronisation entre les échantillons est satisfaisant et l'écart est négligeable à la vitesse d'acquisition de 200 Hz. Un exemple de programme implémenté et exécuté par le microcontrôleur est décrit à l'algorithme 1 (et utilisé à la section 6.2). Les premières étapes permettent de configurer le contrôleur du moteur pas à pas et de la caméra. Le déclenchement de la caméra est effectué en envoyant un signal TTL au contrôleur haute vitesse. Finalement, une boucle permet de faire avancer précisément le moteur pas à pas jusqu'à ce que le moteur effectue un demi-tour.

function SYNCHRONISATION DU MOTEUR ET DE LA CAMÉRA

```

    Configuration des canaux de sorties du contrôleur ;
    Sélection de la vitesse du moteur pas-à-pas ;
    Sélection du nombre de pas ( $\text{step}_{max}$ ) effectué par le moteur ;
    Déclenchement de la caméra (à l'aide d'un signal TTL de 300  $\mu\text{s}$ ) ;
    while  $\text{step} < \text{step}_{max}$  do
        Le moteur effectue un déplacement d'un pas ;
         $\text{step} = \text{step} + 1$  ;
    end while
end function
```

Algorithme 1 Programme exécuté par le microcontrôleur afin de synchroniser le mouvement du piston et le déclenchement des caméras. La configuration et le déclenchement de la caméra sont effectués avant la boucle de déplacement du moteur

Le montage permettant la synchronisation du piston et de la caméra est présenté à la fi-

1. Microcontrôleur libre et disponible à <https://www.arduino.cc/>

gure 3.30. Le contrôleur de moteur, fournissant une tension élevée nécessaire à la demande de couple pour le déplacement du piston, est situé au haut de l'image et est contrôlé par 4 fils à partir du microcontrôleur *Arduino*. Ces fils permettent de configurer la vitesse, le sens de la rotation et les options du moteur (mode à micro-pas). Les deux fils connectés à la droite du *Arduino* permettent de fournir un signal TTL (*transistor-transistor logic*) au contrôleur haute vitesse de la caméra et de déclencher l'acquisition. Le microcontrôleur est alimenté par un port USB standard de l'ordinateur (au bas de l'image), qui permet aussi de modifier le programme exécuté.

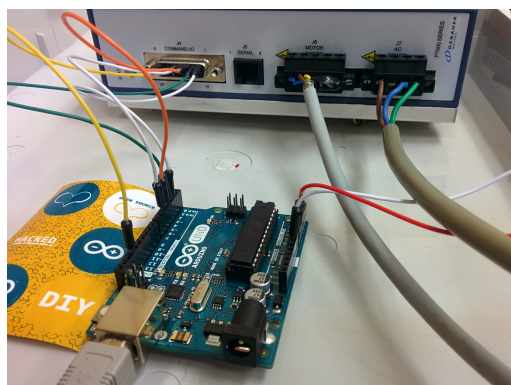


Figure 3.30 Montage présentant le microcontrôleur *Arduino*, connecté au contrôleur du moteur, série P7000 de *Danaher* (au haut de l'image) et des fils (rouge et blanc) permettant la synchronisation et le déclenchement de la caméra

3.2 Simulations numériques

L'utilisation de simulations numériques permet d'obtenir des bases de données de vitesse complètes, rapidement, et sans erreur. Il est donc avantageux lors du développement de nouvelles méthodes d'analyse, de les appliquer au préalable à des champs simulés, car ils sont généralement plus simples qu'en réalité.

L'obtention de bases de données de vitesse pour les différents cas numériques traités a été réalisée à l'aide d'un logiciel d'éléments finis *maison*, développé à Polytechnique Montréal principalement par le professeur André Garon. J'ai eu la chance au fil des années de découvrir, de participer au développement et bien sûr d'utiliser ce logiciel. Bien que le but de cette thèse ne consiste pas à développer de nouvelles méthodes numériques pour la résolution de l'équation de Navier–Stokes, les étapes principales sont présentées dans les prochaines sections en décrivant les caractéristiques du logiciel d'éléments finis utilisé.

3.2.1 Forme faible de l'équation de Navier–Stokes

En éléments finis, la forme faible permet de déterminer des solutions numériques approchées du problème d'origine, dans notre cas l'équation de Navier–Stokes. Avant de présenter le système d'équations sous sa forme faible, il est important de rappeler les espaces fonctionnels utilisés et nécessaires à ce développement. Avec Ω , un domaine de \mathbb{R}^d et $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, on peut définir les espaces de Sobolev de carré intégrable.

Définition 1 $L^2(\Omega) = \{u(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty\}$,

et H^1 le sous-espace de L^2 qui assure que la dérivée de la solution soit aussi sommable :

Définition 2 $H^1(\Omega) = \left\{u(x) \in L^2 \mid \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\Omega < \infty\right\}$.

La formulation faible de l'équation de Navier–Stokes est obtenue en multipliant le système d'équations (??) par une fonction test qu'on intègre sur le domaine Ω . Puisque la vitesse $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$, la fonction test φ utilisée pour la vitesse appartient également à $H^1(\Omega)$ et multipliera l'équation de la quantité mouvement. Cependant la pression $p \in L^2(\Omega)$ donc la fonction test q utilisée pour la pression sera aussi sélectionnée dans cet espace. Cette fonction test est utilisée pour le passage à la formulation faible de l'équation de la continuité.

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \varphi \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Omega$$

$$q (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est défini comme la somme de la force de pression et des forces visqueuses, *c.-à-d.* $\boldsymbol{\sigma} \equiv -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$ où \mathbf{I} est la matrice identité. Notons qu'il est d'usage d'utiliser les mêmes polynômes pour la fonction test que pour l'approximation des variables à résoudre (cette étape est expliquée à la section suivante).

En appliquant le théorème de la divergence au membre de droite, on obtient la formulation faible du système d'équations :

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot \left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \varphi d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (3.14)$$

$$q (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (3.15)$$

où \mathbf{n} est la normale à la frontière Γ . Notons la présence du terme du membre de droite pour chacune des frontières (Γ_i) délimitant le domaine Ω .

3.2.2 Discrétisation des équations

La discrétisation par la méthode des éléments finis (Solin *et al.*, 2003) peut être définie par trois éléments :

Définition 3 *La méthode des éléments finis se résume aux trois éléments suivants $(\mathcal{K}, \mathcal{P}, \mathcal{N})$ (Ciarlet, 2002) :*

- \mathcal{K} est un ensemble fermé de \mathbb{R}^d non nul et ayant une frontière lipschitzienne, où $d = 1$ pour des intervalles, $d = 2$ pour des surfaces et $d = 3$ pour des volumes ;
- \mathcal{P}_p est un espace de fonctions d'ordre p défini sur l'ensemble \mathcal{K} ;
- $\Sigma = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ est un ensemble de fonctions linéaires défini sur l'espace \mathcal{P}_p . Par définition, ces fonctions sont construites telles que $\varphi_i(N_j) = \delta_{ij}$, où $\varphi_i(N_j)$ correspond à l'évaluation de la i -ème fonction linéaire au j -ème point d'évaluation.

La première étape consiste à délimiter le domaine de calcul, soit la zone d'intérêt où la résolution sera effectuée. Comme établi à la définition 3, on considère ce domaine borné d'une frontière lipschitzienne, ce qui assure une régularité suffisante et permet l'utilisation des espaces de Sobolev utiles à la résolution des équations aux dérivées partielles. Le domaine est ensuite subdivisé en cellules qui composent le maillage, la représentation numérique de la région physique à traiter.

Définition 4 *Un maillage d'éléments finis $\mathcal{T}_{h,p} = K_1, K_2, \dots, K_N$ défini sur un domaine $\Omega_h \subset \mathbb{R}^d$ délimité aux frontières par la jonction de fonctions polynomiales est une subdivision géométrique de Ω_h formée d'un nombre fini d'éléments N sans chevauchement tel que $\Omega_h = \cup_{i=1}^M K_i$.*

Les maillages utilisés à la résolution des simulations présentées dans cette thèse ont tous été générés à l'aide du logiciel libre Gmsh (Geuzaine et Remacle, 2008). Selon la méthode des éléments finis, la forme faible est évaluée aux éléments du maillage. Afin de simplifier le calcul des matrices élémentaires évaluées sur ces éléments, et fonction de leurs dimensions, on définit les approximations sur un élément de référence normalisé. Par exemple, pour les éléments unidimensionnels, on construit une transformation de l'élément dans le domaine réel $x =]x_1^e, x_2^e[$ à l'élément de référence $\xi =]-1, 1[$. Cet élément de référence permet, pour tous les éléments du maillage, l'utilisation d'une seule règle d'approximation de la géométrie et de la solution ainsi que d'une seule règle d'intégration numérique. La forme faible doit être modifiée en fonction du jacobien de la transformation, mais cette étape triviale n'est pas présentée.

Une fois le maillage construit, il est d'usage de définir le type des polynômes d'interpolation φ_i qui permettent l'approximation d'une variable u^e sur un élément à l'aide de ses valeurs nodales u_j^e :

$$u_N^e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=0}^N u_j^e \varphi_j(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.16)$$

où $\boldsymbol{\xi}$ sont les variables spatiales sur un élément, u_j^e sont les valeurs nodales inconnues (u, v, w, p pour l'équation de Navier–Stokes).

Le choix de ces polynômes est important et a des influences sur :

- la précision de l'approximation de la solution ;
- le conditionnement de la matrice à résoudre ;
- la quantité de mémoire nécessaire ;
- le temps de calcul.

Les éléments finis sont souvent définis et associés aux polynômes de Lagrange. Ces fonctions linéaires, formées du produit de différences divisées, sont construites à l'aide de la définition suivante :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq k \\ i \neq j}} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad (3.17)$$

et permettent l'interpolation des valeurs nodales u_j^e telles que présentées à l'équation (3.16). Le nombre de points d'interpolation x_i est sélectionné en fonction du degré d'interpolation k désiré et ils sont distribués de manière équidistante sur l'élément.

La méthode *spectrale* des éléments finis présente une méthode de discrétisation alternative. Leur construction est plus complexe, mais permet l'utilisation de polynômes d'ordre élevé tout en conservant un conditionnement faible. Il existe deux implémentations principales, l'une basée sur les polynômes de Chebyshev et l'autre sur les polynômes de Legendre. Sur des domaines de calcul à géométrie simple, la résolution d'un système construit à l'aide de polynômes de Chebyshev (trigonométriques) peut être effectuée analytiquement à l'aide de transformations de Fourier rapide (FFT), ce qui diminue considérablement le temps de calcul par rapport aux méthodes classiques (basées sur les polynômes de Lagrange). Malgré cet avantage majeur, la méthode est maintenant abandonnée en faveur d'une méthode basée sur les polynômes de Legendre. Cette dernière est simple d'implémentation et plus polyvalente, surtout en présence de domaines complexes et de conditions limites hétérogènes.

La figure 3.31 présente le conditionnement de la matrice et l'erreur de la solution de l'équation de diffusion unidimensionnelle. Le maillage est formé d'un seul élément où le degré du polynôme d'approximation est augmenté (et simultanément le nombre de degrés de liberté).

En augmentant le degré des polynômes, l'erreur diminue rapidement indépendamment de sa construction. Cependant, le conditionnement plus faible relié à l'utilisation des polynômes de Legendre engendre moins d'erreurs lors de la résolution et permet de résoudre le système avec une précision de $\sim 10^{-15}$ (au lieu $\sim 10^{-12}$ avec les polynômes de Lagrange).

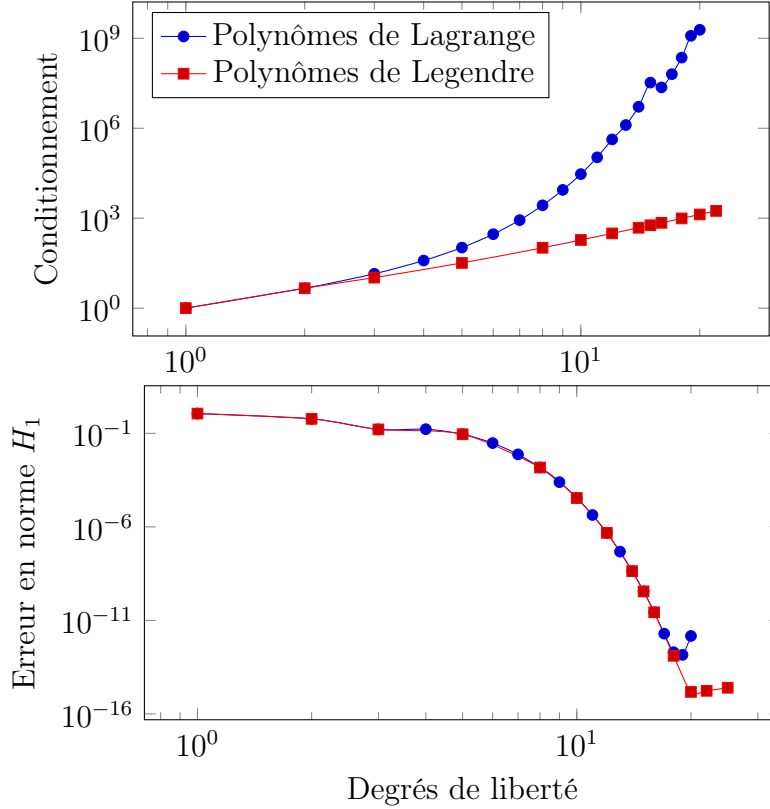


Figure 3.31 Conditionnement de la matrice et erreur d'approximation en fonction du nombre de degrés de liberté (DDL) pour les polynômes de Lagrange et de Legendre

Les calculs présentés dans cette thèse sont réalisés à l'aide d'approximations basées sur les polynômes de Legendre P_{L_p} de degré p . Ils sont aussi solutions de l'équation différentielle dite de Legendre,

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{d}{dx} P_{L_p}(x) \right) + p(p + 1) P_{L_p}(x) = 0,$$

qui est rencontrée en physique, plus particulièrement pour la résolution des équations de Laplace en coordonnées sphériques.

Le polynôme de Legendre peut aussi être construit analytiquement, en fonction du degré p , à l'aide de la formule de Rodrigue (ou Ivory–Jacobi),

$$P_{L_p}(x) = \frac{1}{2^p p!} \frac{d^p}{dx^p} ((x^2 - 1)^p). \quad (3.18)$$

Les dix premiers degrés du polynôme de Legendre sont présentés au tableau 3.2 et représentés à la figure 3.32 sur l'intervalle $[-1, 1]$ pour les degrés inférieurs à 5.

Tableau 3.2 Polynômes de Legendre pour les degrés inférieurs à 10

p	$P_{L_p}(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$
6	$\frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)$
7	$\frac{1}{16}(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)$
8	$\frac{1}{128}(6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)$
9	$\frac{1}{128}(12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)$
10	$\frac{1}{256}(46189x^{10} - 109395x^8 + 90090x^6 - 30030x^4 + 3465x^2 - 63)$

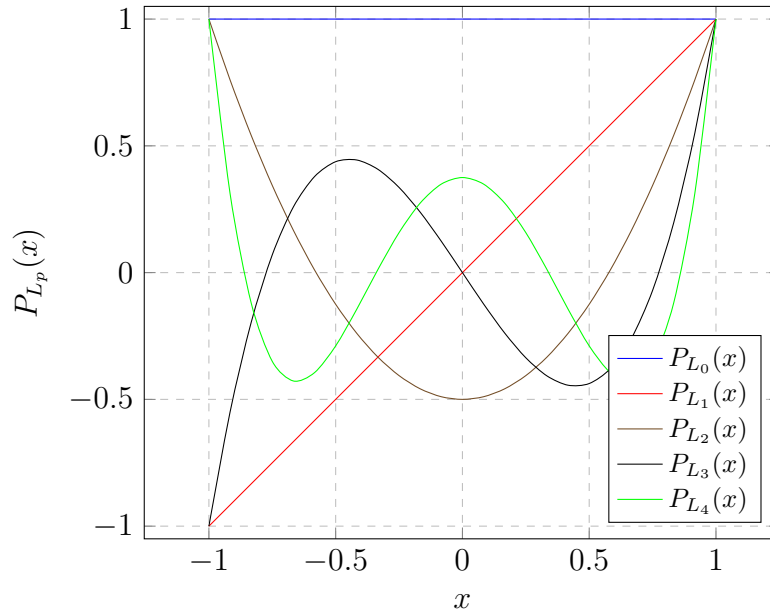


Figure 3.32 Polynômes de Legendre ayant un degré inférieur à 5

Afin de déterminer les fonctions d'interpolation, il est ensuite nécessaire de déterminer les coordonnées de Gauss-Lobatto. Situées sur l'élément unidimensionnel de référence, ces coor-

données sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(1 - \xi^2) P'_{L_p}(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1], \quad (3.19)$$

où P'_{L_p} est la dérivée du polynôme de Legendre de degré p .

Les coordonnées de Gauss correspondent aux zéros du polynôme de Legendre. Le premier terme de l'équation, $(1 - \xi^2)$, permet d'inclure les extremums de l'intervalle et ainsi de conserver la continuité C_0 aux bords d'éléments mitoyens.

Les fonctions d'interpolation sont obtenues du polynôme de Legendre de degré p et des coordonnées de Gauss-Lobatto (ξ_i) à l'aide de l'équation analytique suivante :

$$\varphi_i(\xi) = \frac{-1}{N(N+1)} \frac{(1 - \xi^2) P'_{L_p}(\xi)}{(\xi - \xi_i) P_{L_p}(\xi_i)} \quad 0 \leq i \leq p \quad (3.20)$$

permettant la génération de $p + 1$ fonctions d'interpolation orthogonales. La figure 3.33 permet d'illustrer les différences entre les polynômes de Lagrange et de Legendre. Les points d'interpolation positionnés aux points de Gauss-Lobatto et de manière équidistante sont illustrés à l'aide de lignes verticales pointillées. Par construction, une fonction d'interpolation est unitaire à chacun des points d'interpolation et leurs positions correspondent aux maximums locaux des polynômes de Legendre (Fig. 3.33a). Par contre, la valeur d'une fonction d'interpolation de Lagrange peut être supérieure à 1 (Fig. 3.33b).

La construction de ce type d'approximation est plus coûteuse, cependant le passage aux ordres et aux dimensions supérieures se fait à un coût de calcul pratiquement nul. Les noeuds d'interpolation sont distribués de la même façon selon les directions x , y et z et les fonctions d'interpolation s'obtiennent par le produit des fonctions pour chacune des coordonnées,

$$\varphi_i = \varphi_i^x \varphi_i^y \varphi_i^z. \quad (3.21)$$

Le passage aux dimensions supérieures est donc simple, mais nécessite une structure de données flexible. Le logiciel utilise la structure d'un maillage quadratique, en représentant le domaine 1D d'éléments linéaires, 2D de quadrilatères ou 3D d'hexaèdres possédant respectivement trois, neuf et vingt-sept noeuds, présentés à la figure 3.34. À l'exécution (en fonction de la configuration fournie par l'utilisateur), l'ordre des éléments est modifié à l'interne en augmentant le nombre de degrés de liberté et de fonctions d'interpolation sur les noeuds de calculs, soit les cercles blancs et gris à la figure 3.34.

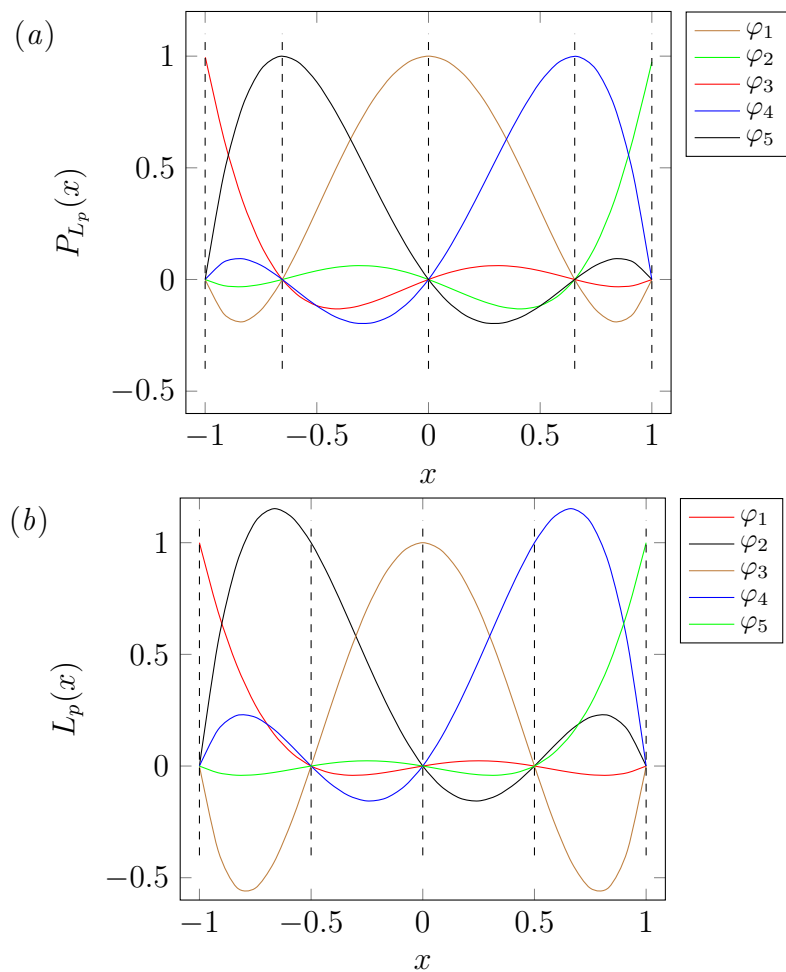


Figure 3.33 Fonctions d'interpolations quartique de Legendre (a) et de Lagrange (b). La position des points de Gauss-Lobatto en (a) et des noeuds équidistants en (b) sont indiqués par les lignes verticales pointillées

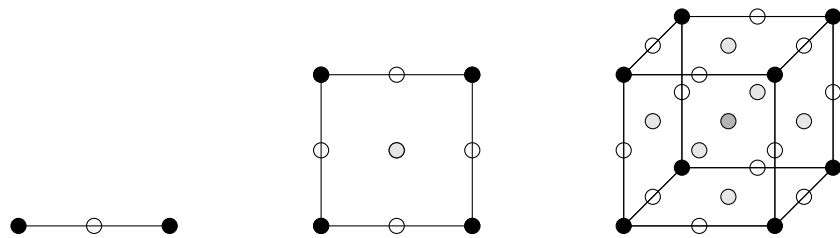


Figure 3.34 Visualisation de la structure des éléments, les cercles noirs sont les noeuds géométriques et les cercles blancs et gris sont les noeuds de calcul

3.2.3 Discrétisation du terme temporel

La discrétisation des dérivées temporelles est effectuée à l'aide d'une formule implicite de différenciation arrière (BDF),

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i u_{n-i} = h\beta_0 f(t_n, u_n), \quad (3.22)$$

avec $f(t_n, u_n)$ la dérivée temporelle $\partial u_n / \partial t$ au temps t_n et h le pas de temps. Les coefficients (α_i, β_0) sont obtenus à l'aide des polynômes d'interpolation de Newton et sont présentés, pour un pas de temps constant, au tableau 3.3.

Tableau 3.3 Coefficients des méthodes de différenciation arrière (BDF) en fonction de l'ordre p et du nombre d'étapes k de la méthode. Les coefficients permettent de résoudre implicitement le système d'équations linéaires au temps t_n

p	k	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_0
1	1	1	-1	-	-	-	-	-	1
2	2	3	-4	1	-	-	-	-	2
3	3	11	-18	9	-2	-	-	-	6
4	4	25	-48	36	-16	3	-	-	12
5	5	137	-300	300	-200	75	-12	-	60
6	6	147	-360	450	-400	225	-72	10	60

Par exemple pour le 3^e ordre, la solution au temps t_n est évaluée par

$$11u_n - 18u_{n-1} + 9u_{n-2} - 2u_{n-3} = h6f(t_n, u_n)$$

Ce type de méthode est très intéressante puisque le coût de calcul est, tout compte fait, indépendant de l'ordre de la méthode. Cependant, l'augmentation de l'ordre nécessite le stockage de solutions antérieures supplémentaires (voir Fig. 3.35), un coût supplémentaire négligeable par rapport à la quantité de mémoire allouée à la résolution.

La stabilité de la méthode varie en fonction de l'ordre sélectionné. Les deux premiers ordres sont *A-Stable* (Dahlquist, 1958), ce qui signifie que les méthodes convergent sans aucune restriction sur le choix du pas d'intégration. Le célèbre théorème présenté par Dahlquist (1963) établit que l'ordre maximum d'une méthode linéaire *A-Stable* ne peut dépasser 2. De plus, les ordres supérieurs à 6 ne sont pas *0-Stable*, ce qui signifie qu'il n'existe pas toujours un pas d'intégration $h > 0$ permettant de contrôler les perturbations provenant d'erreurs des pas de temps antérieurs, elles ne sont donc pas utilisées. Il est alors important de

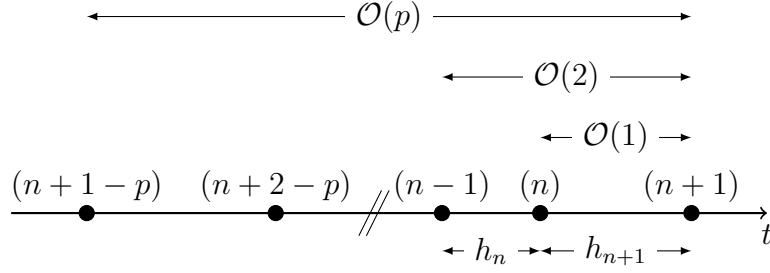


Figure 3.35 Instants t nécessaires à la résolution temporelle d'une méthode BDF en fonction de l'ordre de précision p

combiner la résolution temporelle avec une méthode d'estimation de l'erreur afin de détecter les instabilités et assurer la convergence des simulations en temps. Par construction, il est facile d'obtenir une estimation de l'erreur d'un polynôme d'ordre p en ajoutant un terme d'ordre supérieur.

Ces termes supplémentaires permettent d'adapter le pas de temps h et l'ordre de la méthode p , ce qui permet d'obtenir une solution précise à un coût de calcul minimal. La modification du pas de temps en cours de résolution nécessite cependant l'évaluation des coefficients α_i par une méthode itérative, présentée à l'algorithme 2.

```

function COEFFICIENTS( $p$ )
  dimension  $\alpha[0 : p, 1 : p]$ 
  dimension  $w[0 : p]$ 
  for  $i = 1 : p$  do
     $f = 1$ 
    for  $j = 1 : i - 1$  do
       $f = f \cdot (t(0) - t(j))$ 
    end for
     $w = 0$ 
     $w \leftarrow \text{DIVIDEDDIFFERENCE}(0, i, w)$ 
    for  $j = i : p$  do
       $\alpha(0 : i, j) = \alpha(0 : i, j) + w(0 : i) \cdot f$ 
    end for
  end for
  return  $\alpha$ 
end function

```

Algorithme 2 Évaluation des coefficients α_i jusqu'à l'ordre p

Une fonction récursive permet l'évaluation des différences divisées (similaire à la construc-

tion de polynôme d'interpolation de Lagrange) nécessaire au calcul des coefficients α_i et est présentée à l'algorithme 3.

```

function DIVIDEDIFFERENCE( $ip, im, c$ )
  dimension  $c[ip : im]$ 
  dimension  $w[ip : im]$ 
  if  $ip = im$  then
     $c(ip) = 1$ 
  else
     $f = 1/(t(ip) - t(im))$ 
     $w = 0$ 
     $w \leftarrow \text{DIVIDEDIFFERENCE}(ip, im - 1, w(ip))$ 
     $c(ip : im - 1) = c(ip : im - 1) + w(ip : im - 1) \cdot f$ 
     $w = 0$ 
     $w \leftarrow \text{DIVIDEDIFFERENCE}(ip + 1, im, w(ip + 1))$ 
     $c(ip + 1 : im) = c(ip + 1 : im) - w(ip + 1 : im) \cdot f$ 
  end if
  return  $c$ 
end function

```

Algorithme 3 Calcul récursif des différences divisées

Pour une erreur temporelle fixée, la méthode BDF adaptative modifie l'ordre d'interpolation p en maximisant le pas de temps h . Le test de stabilité implémenté est basé sur le principe suivant :

Définition 5 *Une méthode BDF est considérée comme stable s'il n'existe pas de méthode d'ordre inférieur permettant d'obtenir une solution avec le même niveau d'erreur en utilisant un pas de temps supérieur (Hay et al., 2015).*

Cette stratégie permet à chaque pas de temps d'évaluer la stabilité de la méthode et d'effectuer l'adaptation $h - p$ adéquate (Alg. 4). En pratique, plusieurs heuristiques supplémentaires sont implémentées afin d'augmenter l'efficacité et, par exemple, d'éviter le changement d'ordre du schéma temporel tous les pas de temps. Pour plus d'informations sur les différentes étapes, le lecteur est dirigé vers l'article de Hay *et al.* (2015), décrivant en détail la méthode implémentée.

```

 $t_n = t_i$ 
 $e_{n+1} = 0$ 
while  $t < t_{final}$  do
     $p_{n+1} = \text{PSELECTION}()$  ▷ Calcul de l'ordre stable le plus élevé
     $h_{n+1} = \text{HSELECTION}(p_{n+1}, e_{n+1})$  ▷ Calcul du pas de temps le plus grand
    Label:
         $t_{n+1} = t_n + h_{n+1}$ 
         $y_{n+1} = \text{UPDATE}(p_{n+1}, h_{n+1})$  ▷ Calcul de  $\alpha_i$  et solution extrapolée
         $y_{n+1} = \text{FLOWSOLVER}(y_{n+1})$  ▷ Résoudre l'équation de Navier–Stokes
         $e_{n+1} = \text{ERROR}(y_{n+1})$  ▷ Estimation de l'erreur de la solution
        if  $e_{n+1} < \epsilon$  then ▷ Validation de la solution (tolérance choisie a priori)
             $\text{SOLEVALUATE}()$  ▷ Interpolation de la solution aux  $t$  intermédiaires requis
        else
             $h_{n+1} = 0.5h_{n+1}$ 
            go to Label
        end if
    end while

```

Algorithme 4 Méthode BDF adaptative $h - p$

3.2.4 Résolution du système d'équations

Le système d'équations non linéaires, formé de (3.14) et (3.15), est présenté sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(\rho) + \mathbf{C}(\rho, \mathbf{U}) + \mathbf{D}(\mu) & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

où $\mathbf{M}(\rho)$ est la matrice de masse, $\mathbf{C}(\rho, \mathbf{U})$ la matrice convection et $\mathbf{D}(\mu)$ la matrice de diffusion de la vitesse, \mathbf{B} la matrice de la continuité, \mathbf{U} le vecteur des solutions de vitesse, \mathbf{P} le vecteur de solutions en pression et \mathbf{Q} le vecteur des quantités connues.

Ce système non linéaire est simplifié par

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

où la matrice \mathbf{A} est dépendante du vecteur solution \mathbf{X} .

Par la méthode du point fixe, il est possible de linéariser le système et résoudre en utilisant une solution initiale \mathbf{X}_0 :

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$$

Le membre de gauche est alors évalué à l'aide de la solution initiale et à chacune des itérations, la correction $\Delta \mathbf{X}$ permet de s'approcher de la solution exacte :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) (\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}) &= \mathbf{B} \\ \mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} &= \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X} &= \mathbf{R}\end{aligned}$$

où \mathbf{R} est le vecteur résidus. Le système est résolu itérativement jusqu'à ce que la norme de la correction $\|\Delta \mathbf{X}\| < \epsilon$ et la norme du vecteur résidus $\|\mathbf{R}\| < \epsilon$, avec ϵ la précision voulue et fixée a priori.

Cette méthode de résolution est simple, mais la convergence est lente et est dépendante de la solution initiale. Il est donc plus intéressant d'utiliser la méthode de résolution de Newton et de linéariser les termes de la matrice \mathbf{A} à l'aide d'une approximation de Taylor :

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}) (\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}) = \mathbf{B} \quad (3.24)$$

$$\left(\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_0} \Delta \mathbf{X} \right) \right) (\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}) = \mathbf{B} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_0 + \mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \Delta \mathbf{X}_0 + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_0} \Delta \mathbf{X} \right) \mathbf{X}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_0} \Delta \mathbf{X} \right) \Delta \mathbf{X}}_{\text{Termes d'ordres supérieurs}} = \mathbf{B} \quad (3.26)$$

En négligeant les termes d'ordres supérieurs, on obtient la forme linéarisée du système à résoudre :

$$\left(\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_0} \right) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}(\mathbf{X}_0) \mathbf{X}_0 \quad (3.27)$$

$$\left(\mathbf{A}(\mathbf{X}_0) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{X}_0} \right) \Delta \mathbf{X} = \mathbf{R} \quad (3.28)$$

Le résidu \mathbf{R} est calculé à l'aide de la solution initiale \mathbf{X}_0 de l'étape courante. La matrice du membre de gauche est linéarisée manuellement et la forme faible est implémentée sous sa forme linéaire. La formulation faible de la matrice \mathbf{A} de l'équation tridimensionnelle de Navier-Stokes est présentée en Annexe C.

CHAPITRE 4 MÉTHODE DE DÉTECTION DU DÉCOLLEMENT MOBILE

L'écoulement utilisé dans ce chapitre afin de présenter notre méthode de détection du décollement est un écoulement bidimensionnel visqueux autour d'un cylindre en rotation se déplaçant près d'une paroi horizontale (Klonowska-Prosnak et Prosnak, 2001). La solution analytique, présentée à l'annexe D, a été préférée au modèle de la bulle de décollement développé par Ghosh *et al.* (1998), et systématiquement utilisée sous différentes formes par Haller et ses collaborateurs, parce qu'en plus d'être valide près de la paroi, elle peut être utilisée partout dans l'écoulement. Cette configuration simple, présentée à la figure 4.1, permet un contrôle complet sur le décollement à l'aide de quelques paramètres caractéristiques.

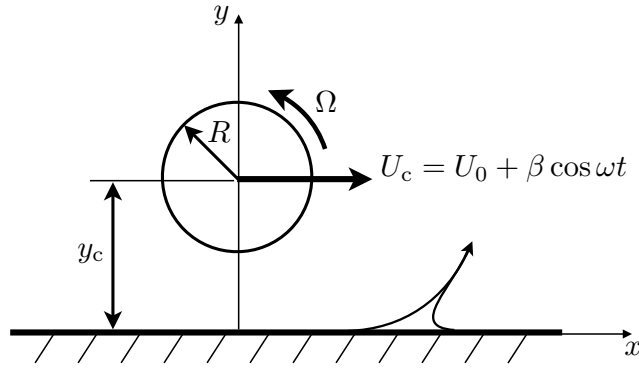


Figure 4.1 Géométrie et paramètres de l'écoulement généré par un cylindre en translation et en rotation

Un cylindre de rayon R , initialement en $x_c = 0$ et y_c , pivote autour de son axe à une vitesse angulaire Ω constante, ce qui entraîne la création d'un décollement à une position sur la paroi en aval du cylindre. En tradatant le cylindre sur une ligne parallèle à la paroi en suivant une trajectoire prédéfinie, le décollement peut être contrôlé sous différentes conditions. Les conditions initiales de l'écoulement sont fixées par $R = 1$, $y_c = 2$, $\Omega = 1$ et la vitesse de translation du cylindre est $U_c = U_0 + \beta \cos \omega t$, où U_0 est la composante constante de la vitesse à laquelle est superposée une composante oscillatoire de fréquence angulaire ω et d'amplitude β . Avant d'examiner le cas du décollement mobile, le décollement fixe est d'abord présenté.

4.1 Décollement fixe

Lorsque le cylindre oscille sans composante continue ($U_0 = 0$), l'écoulement est périodique (de période T) ce qui correspond aux caractéristiques d'un décollement fixe. Le décollement se produit au point sur la paroi où le cisaillement, moyenné sur une période de l'écoulement, est nul, et le profil de décollement peut être calculé à l'aide des équations explicites de Haller (2004) présentées au chapitre 2.

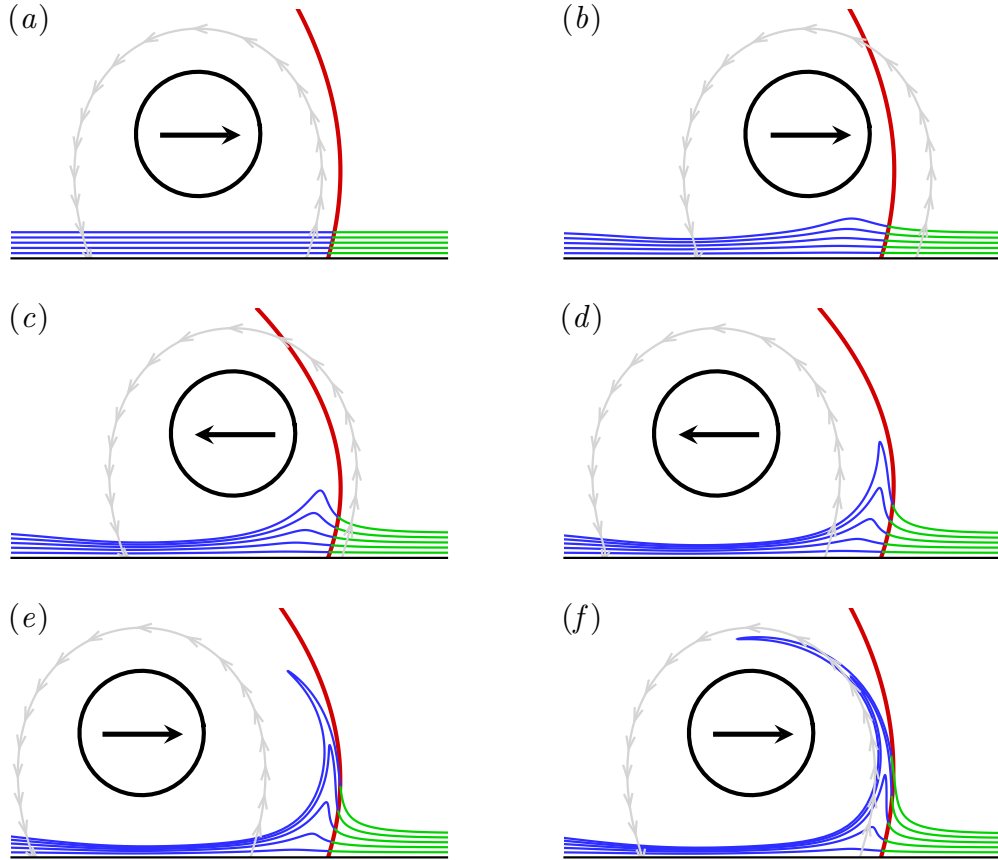


Figure 4.2 Décollement fixe pour un écoulement périodique en temps avec $U_0 = 0$, $\omega = 2\pi$, et $\beta = 6$: (a) $t = 0$, (b) $t = 3.2T$, (c) $t = 6.4T$, (d) $t = 9.6T$, (e) $t = 12.8T$ et (f) $t = 16T$. Le profil de décollement (rouge) est affiché conjointement à la ligne de courant instantanée (grise) émanant du point de frottement nul à la paroi. Des particules sont positionnées sur des lignes matérielles initialement alignées avec la paroi et colorées de différentes couleurs (bleue et verte) en fonction de leur position initiale au temps $t = 0$ par rapport au profil de décollement prédit par la théorie et ensuite advectées en temps

La figure 4.2 présente les résultats obtenus avec $T = 1$ et $\beta = 6$. Le profil de décollement du deuxième ordre est calculé en temps et accompagné des lignes de courant instantanées émanant du point de frottement nul à la paroi. On peut noter que les particules de fluide,

initialement parallèles à la paroi, sont éjectées et forment un pic en amont du point fixe de décollement. Ceci contraste avec la position du cisaillement nul qui oscille autour du point de décollement réel, illustrant que le mécanisme de décollement n'est pas relié au critère de Prandtl. De plus, on note que la prédiction temporelle des profils de décollement concorde avec le mouvement des particules près de la paroi. Lorsque la distance entre les particules et la paroi augmente, la prédiction est moins bonne, mais il est important de souligner qu'une meilleure approximation serait obtenue en ajoutant des termes d'ordre supérieur. Notons enfin que contrairement aux idées reçues, le pic amont indique bien la présence du décollement, mais n'indique pas directement la position du décollement qui se situe en aval. Ceci est en lien direct avec les nombreuses visualisations qualitatives qui sont présentées dans la littérature, et qui ne permettent finalement pas de déterminer le point réel du décollement.

4.2 Décollement mobile

Afin de générer un décollement mobile, le cylindre doit être translaté. Pour le premier exemple, présenté à la figure 4.3, la vitesse de translation du cylindre est fixée à une valeur constante ($U_0 = 0.3, \beta = 0$). Les particules de fluide sont relâchées de deux lignes parallèles à la paroi au temps initial $t = 0$ (Fig. 4.3a). Leurs positions sont advectées en temps et présentées dans un repère se déplaçant à la vitesse du cylindre. Tout comme dans le cas d'un décollement fixe, les particules s'éloignent de la paroi et forment un pic, et encore une fois, à une position différente du point de cisaillement nul (visualisé à l'aide des lignes de courant en rouge). Cependant, tandis que les particules situées sur la ligne bleue sont éjectées de la paroi, les particules initialement plus près de la paroi (ligne verte) forment aussi un pic, mais restent près de la frontière sans jamais être éjectées. Ceci reste vrai même pour des temps d'advection importants, par exemple à $t = 100$ sur la figure 4.3(f).

Si on applique la méthode décrite par Surana et Haller (2008) (introduite à la section 3) il n'y a aucune fluctuation dans l'écoulement dans cet exemple, donc selon leur théorie le décollement doit apparaître où le cisaillement pariétal de l'écoulement moyen est nul, *c.-à-d.* de l'écoulement instantané dans notre cas, ce qui n'est pas observé puisqu'aucun décollement ne se produit près de ce point de frottement nul. De plus, il semble difficile d'identifier un critère permettant de détecter le décollement en n'utilisant que des quantités pariétales, mais au contraire, les résultats semblent (du moins qualitativement) aller dans le sens du principe MRS qui affirment que le décollement instationnaire se produit en un point éloigné de la frontière où la composante parallèle à la paroi du cisaillement est nulle, *c.-à-d.* à l'intérieur de la couche limite et non à la paroi. Par contre, dans cet exemple, la contrainte de cisaillement ne s'annule à aucun endroit autour de la formation du pic, ce qui indique qualitativement

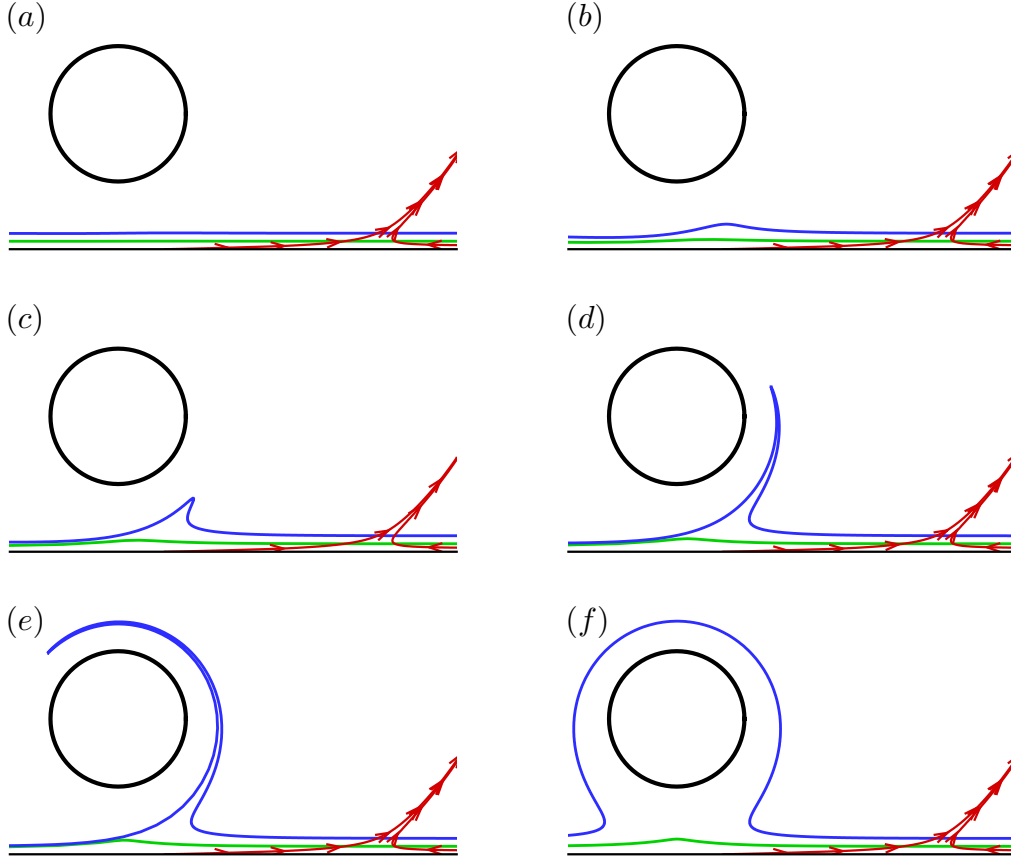


Figure 4.3 Décollement mobile avec $U_0 = 0.3$ et $\beta = 0$. Les lignes matérielles (en bleue et vert) sont initialement alignées avec la paroi au temps $t = 0$ en (a). Les résultats sont présentés dans un repère se déplaçant avec la vitesse de translation du cylindre au temps (b) $t = 4$, (c) $t = 8$, (d) $t = 12$, (e) $t = 16$ et (f) $t = 100$. De plus, les lignes de courant instantanées autour du point de frottement nul à la paroi sont présentées en rouge. Notons qu'en (f), la ligne bleue est constituée de particules qui ont été attirées et ensuite éjectées de la paroi par le décollement, qui ont ensuite fait le tour du cylindre pour finalement être transportées vers la gauche ; puisque les autres particules restent à la gauche du cylindre, elles sont déconnectées de la ligne matérielle

que le principe MRS n'est pas vérifié. Cependant, ce principe ne peut être appliqué que dans le contexte la théorie de la couche limite, *c.-à-d.* à la limite asymptotique lorsque le nombre de Reynolds $Re \rightarrow \infty$, ce qui n'est pas le cas ici.

Il faut sans aucun doute établir un autre critère de détection, c'est ce qui est présenté aux prochaines sections et ce qui constitue l'élément original de premier plan de cette thèse.

4.3 Détection du décollement

Puisque le phénomène de décollement mobile ne semble laisser aucune empreinte à la frontière, il est inévitable de rechercher ce point à l'intérieur de l'écoulement, *c.-à-d.* hors de la frontière. Suite aux observations des résultats présentés à la figure 4.3, et en accord avec le principe MRS, le décollement devrait être défini plus adéquatement par un point selle situé au-dessus de la paroi (schématisé à la figure 4.4 et détaillé ci-dessous). Ceci est, par exemple, le cas pour l'écoulement autour d'un cylindre en mouvement (voir Koromilas et Telionis, 1980).

4.3.1 Contexte théorique

Les éléments théoriques sont basés sur les travaux de Haller et Iacono (2003) et Lekien et Haller (2008) qui utilisent un changement de coordonnées locales afin d'étudier l'hyperbolicité lagrangienne.

Si nous prenons une ligne matérielle infinitésimale $\boldsymbol{\xi}$, positionnée en $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) = (x(t, \boldsymbol{x}_0), y(t, \boldsymbol{x}_0))$ où \boldsymbol{x}_0 est la position initiale, son évolution temporelle peut être décrite en linéarisant l'écoulement autour du point \boldsymbol{x} , ce qui donne l'expression suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \nabla \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0), t) \boldsymbol{\xi}, \quad (4.1)$$

où $\boldsymbol{u} = (u, v)$ est le champ de vitesse défini au temps t et à la position \boldsymbol{x} . Les auteurs cités plus haut introduisent alors un système de coordonnées aligné avec le vecteur vitesse local afin de transformer l'équation (4.1) en un système pouvant être résolu explicitement. On considère ici le cas plus général, où le système de coordonnées est défini par des axes arbitraires formés par les vecteurs unitaires $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}(t), t)$ et $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}(t), t)$. Avec la matrice de transformation $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}(t), t)$ définie par

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}, t) \quad \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}, t)], \quad (4.2)$$

les coordonnées $\boldsymbol{\xi}$ sur $\boldsymbol{x}(t)$ sont remplacées par les coordonnées $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ alignées avec \boldsymbol{e} et \boldsymbol{n} :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{\eta}. \quad (4.3)$$

et l'écoulement linéaire (Eq. 4.1) devient :

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} S_{\parallel}(t) & \gamma(t) \\ \alpha(t) & S_{\perp}(t) \end{pmatrix} \boldsymbol{\eta}. \quad (4.4)$$

Le nouveau système (4.4) est caractérisé par les termes S_{\parallel} et S_{\perp} qui sont respectivement les

taux d'étirement tangentiel et normal sur la trajectoire $\mathbf{x}(t)$ définie par

$$S_{\parallel} = \langle \mathbf{e}, (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e} \rangle_{\mathbf{x}(t)} = \langle \mathbf{e}, \mathcal{S} \mathbf{e} \rangle_{\mathbf{x}(t)}, \quad (4.5)$$

$$S_{\perp} = \langle \mathbf{n}, (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{x}(t)} = -S_{\parallel} + \delta(t), \quad (4.6)$$

où $\delta(t) = \nabla \cdot \mathbf{u}|_{\mathbf{x}(t)}$ et \mathcal{S} est le tenseur de déformation. L'étirement tangentiel est l'opposé de l'étirement normal pour un fluide incompressible.

Les termes antidiagonaux du système sont

$$\gamma(t) = \langle \mathbf{e}, (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} \rangle_{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{e}}|_{\mathbf{x}(t)}, \quad (4.7)$$

$$\alpha(t) = \langle \mathbf{n}, (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e} \rangle_{\mathbf{x}(t)} - \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{e}}|_{\mathbf{x}(t)}. \quad (4.8)$$

Lorsque le système de coordonnées local est aligné avec le vecteur local de la vitesse, \mathbf{e} est défini par $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$, et $\alpha(t)$ s'écrit

$$\alpha(t) = - \left. \frac{\mathbf{u}^{\perp} \cdot \mathbf{u}_t}{|\mathbf{u}|^2} \right|_{\mathbf{x}(t)}, \quad (4.9)$$

où \mathbf{u}^{\perp} est le vecteur orthogonal à \mathbf{u} et \mathbf{u}_t est la dérivée temporelle de \mathbf{u} .

Dans Haller et Iacono (2003), puisque des écoulements stationnaires (ou des écoulements caractérisés par de faibles variations temporelles) sont étudiés, $\alpha(t) = 0$ (ou est négligeable), et le système (4.4) devient triangulaire supérieur et peut être intégré explicitement. Dans Lekien et Haller (2008), ce système est utilisé pour décrire le décollement sur une paroi avec glissement. Puisque la frontière est fixe, \mathbf{u}_t est nécessairement parallèle à \mathbf{u} , et α est encore une fois nul. Dans ces deux cas, la ligne $\{\eta_2 = 0\}$ est un espace invariant du système (4.4), ce qui signifie qu'un vecteur initialement tangent à \mathbf{e} le restera pour tout temps t . La stabilité de cette ligne peut être obtenue à partir de l'évolution temporelle de η_2 . En définissant

$$\lambda(t_0, t) = \int_{t_0}^t S_{\parallel}(\tau) d\tau \quad (4.10)$$

on obtient, pour un écoulement incompressible,

$$\eta_2(t) = \eta_2(t_0) e^{-\lambda(t_0, t)} \quad (4.11)$$

ce qui indique que pour $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$), cette ligne $\{\eta_2 = 0\}$ attire (repousse) sur l'intervalle temporel $[t_0, t]$. Le critère λ , qui caractérise le taux cumulatif du taux d'étirement sur la ligne,

peut être utilisé afin de caractériser différents phénomènes. Dans Haller et Iacono (2003), ce critère permet de détecter les zones d'étirement important dans les écoulements barotropes turbulents plus efficacement que par exemple en évaluant l'exposant de Lyapunov en temps fini (FTLE). Dans le cas de frontières avec des conditions de glissement sur la vitesse, le critère permet de détecter le décollement pour des applications en géophysique, tels que ceux produits par les courants océaniques sur les côtes (Lekien et Haller, 2008).

Dans notre contexte, le problème est inversé. La base (\mathbf{e}, \mathbf{n}) n'est pas imposée, mais au contraire recherchée. La figure 4.4 présente schématiquement les trajectoires de particules de fluide autour d'un point selle lagrangien se déplaçant près d'une paroi. Le point de décollement, \mathbf{x}_s , est défini par ce point selle et se situe à l'intersection entre une ligne matérielle attractive $\mathcal{M}(t)$, qui coïncide avec le profil de décollement, et une ligne matérielle répulsive $\mathcal{N}(t)$, qui correspondent respectivement à des variétés¹ instable et stable, selon la démonstration de Haller. Puisque le décollement est maintenant défini par deux lignes matérielles s'entrecroisant au point de décollement, nous parlerons par la suite *des* profils de décollement au lieu *du* profil de décollement, ou tout simplement des profils. $\mathcal{N}(t)$, est une ligne matérielle, en définissant $\mathbf{e}(t_0)$ et $\mathbf{n}(t_0)$ par des vecteurs unitaires tangents et normaux à $\mathcal{M}(t_0)$ (*c.-à-d.* pas nécessairement basés sur les vecteurs de la vitesse locale) à un temps arbitraire t_0 , alors $\mathcal{M}(t)$ restera partout tangente à la famille des vecteurs unitaires $\mathbf{e}(t)$ lors de l'advection en temps.

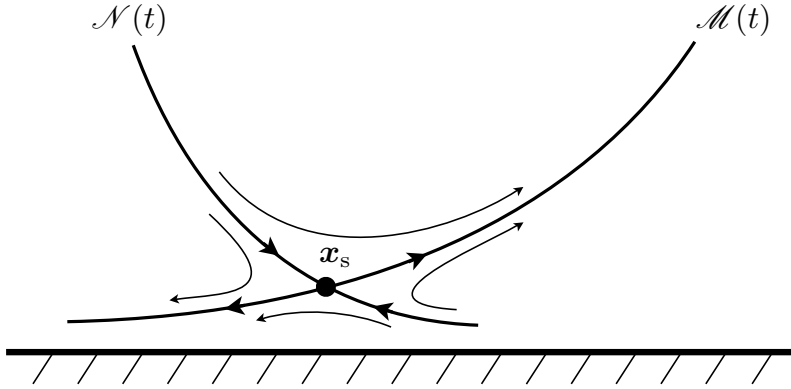


Figure 4.4 Schéma du décollement autour du point selle lagrangien à la position $\mathbf{x}_s = (x_s, y_s)$, accompagné d'une ligne matérielle attractive (variété instable) $\mathcal{M}(t)$ et une ligne matérielle répulsive (une variété stable) $\mathcal{N}(t)$

Pour simplifier, si au temps t_0 , un petit élément de cette ligne est $\boldsymbol{\xi}(t_0) = \xi(t_0)\mathbf{e}(t_0)$, alors

1. En géométrie, la notion de variété est un espace topologique que l'on peut considérer localement euclidien. Dans le contexte de cette thèse, une ligne matérielle est une variété de dimension 1 et une surface matérielle est une variété de dimension 2.

$\boldsymbol{\xi}(t)$ sera toujours sur cette ligne pour $t \geq t_0$, i.e. :

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) = 0, \quad (4.12)$$

ce qui devient avec (4.1) :

$$\langle \mathbf{n}, (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e} \rangle_{\mathbf{x}(t)} - \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{e}}|_{\mathbf{x}(t)} = 0. \quad (4.13)$$

Cela signifie simplement que $\alpha(t) = 0$, d'après (4.8). Il est donc possible d'utiliser le critère λ afin de détecter le décollement.

De plus, en posant sur la ligne matérielle, $\mathbf{e} = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $\mathbf{n} = (-\sin \theta, \cos \theta)$, de (4.13) on obtient

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right]$$

et en combinant les deux composantes, il est possible de déterminer une équation pour la variation temporelle de $\theta(t)$ en fonction des dérivées spatiales des composantes du champ de vitesse :

$$\dot{\theta} = v_x \cos^2 \theta - u_y \sin^2 \theta + (v_y - u_x) \cos \theta \sin \theta. \quad (4.14)$$

Par exemple, en présence d'un point de décollement fixe à la paroi, $\mathcal{N}(t)$ est en fait la frontière ($y = 0$), et pour un écoulement incompressible, $u_x = -v_y = 0$ et $v_x = 0$ à la paroi, ce qui se simplifie en

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\tan \theta} \right) = u_y, \quad (4.15)$$

qui est en fait le résultat obtenu par Haller (2004).

Pour le cas d'un cylindre se déplaçant à une vitesse constante U_0 présenté à la section 4.2, puisque l'écoulement est stationnaire dans le repère se déplaçant avec le cylindre, le point et le profil de décollement devraient aussi être stationnaires dans ce même repère. En conséquence, le point de décollement a une vitesse de déplacement U_0 dans le sens de l'écoulement et aucune vitesse transverse. Puisque les lignes de courant (solution de Klonowska-Prosnak et Prosnak (2001)) sont symétriques par rapport à l'axe vertical du centre du cylindre, sur cet axe $v = 0$, ce qui pourrait être la position du point de décollement ($x_s = x_c$). L'équation (D.1) a été résolue avec $u = U_0$ et $v = 0$ afin de déterminer la coordonnée y_s du point

de décollement. La pente du profil de décollement est déterminée en sachant que $\dot{\theta} = 0$ et puisqu'au point de décollement $u_x = v_y = 0$ encore une fois dû à la symétrie des lignes de courant, l'équation (4.14) devient :

$$\tan \theta = \pm \left(\frac{v_x}{u_y} \right)^{1/2}. \quad (4.16)$$

Dans le référentiel lié au cylindre, l'écoulement est stationnaire, les composantes de la vitesse relative du point de décollement sont nulles et ce dernier correspond à un point critique d'après le concept de Perry et Chong (1987). En conséquence, l'angle du profil de décollement donné par l'équation (4.16) correspond bien à la direction des vecteurs propres du tenseur des gradients du champ de vitesse.

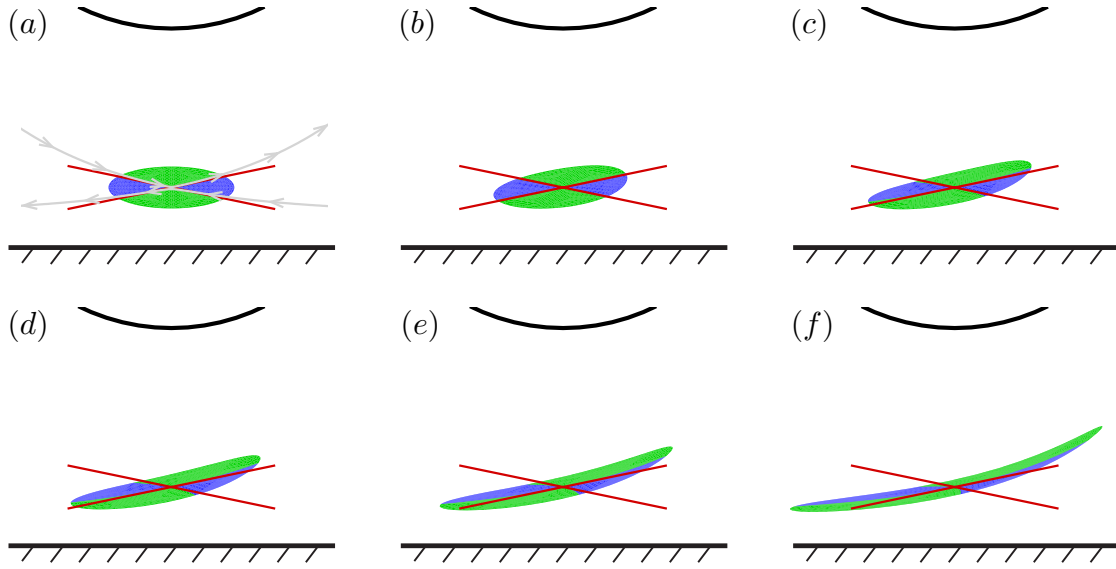


Figure 4.5 Prédiction du décollement mobile lorsque $U_0 = 0.3$ et $\beta = 0$. (a) $t = 0$, (b) $t = 0.8$, (c) $t = 1.6$, (d) $t = 2.4$, (e) $t = 3.2$ et (f) $t = 4$. Les particules (visualisées dans un système de référence se déplaçant avec le cylindre indiqué par une ligne noire au haut de la figure) sont relâchées et identifiées d'une couleur (bleu ou rouge) en fonction de leur position initiale par rapport aux lignes rouges qui correspondent aux tangentes prédites par l'équation (4.16). Les lignes grises correspondent aux lignes de courant qui passent près du point de décollement

La figure 4.5 présente le mécanisme de décollement en advectant des particules de fluide situées dans une région elliptique centrée au point de décollement prédit. Dans la zone près du point selle, les trajectoires des particules restent tangentes aux profils de décollement lorsqu'elles sont advectées par l'écoulement moyen. Les particules du quadrant supérieur sont éjectées de la paroi tandis que celles du quadrant inférieur en sont attirées. Cet exemple est cependant simple puisque le patron des lignes de courant, qui correspondent aux trajectoires,

car l'écoulement est stationnaire dans le repère lié au mouvement du cylindre, est basé sur le phénomène classique induit par le déplacement rectiligne d'un tourbillon translaté près d'une paroi (Doligalski *et al.*, 1994). Lorsque l'écoulement comporte une dépendance temporelle quelconque, les lignes de courant n'ont aucune correspondance avec les lignes matérielles lagrangiennes et ne peuvent directement être utilisées pour leur détection. C'est ce qui est étudié à la section suivante.

4.3.2 Exposant de Lyapunov (FTLE)

L'exposant de Lyapunov est un critère de détection de tourbillons lagrangien et objectif défini par Haller (2001). À chaque position de l'espace, ce scalaire est une mesure du taux de séparation de trajectoires de particules initialement proches de cette position au bout d'un temps T . Il est défini à l'aide du tenseur de déformation de Cauchy–Green \mathcal{S} ,

$$\mathcal{S}(t_0, \mathbf{x}_0, T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t_0 + T)}{\partial x_0} & \frac{\partial x(t_0 + T)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y(t_0 + T)}{\partial x_0} & \frac{\partial y(t_0 + T)}{\partial y_0} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial x(t_0 + T)}{\partial x_0} & \frac{\partial x(t_0 + T)}{\partial y_0} \\ \frac{\partial y(t_0 + T)}{\partial x_0} & \frac{\partial y(t_0 + T)}{\partial y_0} \end{pmatrix}.$$

où $(x(t_0 + T), y(t_0 + T))$ est la position finale atteinte après un temps T par une particule qui était située en (x_0, y_0) au temps t_0 .

Ce tenseur est formé de la multiplication du jacobien de la transformation et de sa transposée, *c.-à-d.* de la dérivée des positions finales $\mathbf{x}(t_0 + T)$ par rapport à leurs positions initiales \mathbf{x}_0 . Cette écriture est similaire à celle du jacobien présentée au chapitre 2, lors de l'analyse de l'équation de la couche limite dans un repère lagrangien.

La valeur propre dominante λ_{max} du tenseur \mathcal{S} permet de déterminer, après un temps T , le taux de séparation maximum de particules initialement éloignées de $\delta(t_0)$ à la position \mathbf{x}_0 :

$$\max \|\delta(t_0 + T)\| = \sqrt{\lambda_{max}} \|\delta(t_0)\|. \quad (4.17)$$

L'équation (4.17) est alors réécrite sous une forme exponentielle et l'exposant de Lyapunov (FTLE pour *Finite-Time Lyapunov Exponent*) est défini par $\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0)$:

$$\max \|\delta(t_0 + T)\| = e^{\sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0)} \|\delta(t_0)\|, \quad (4.18)$$

$$\text{où } \sigma_{t_0}^T(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2|T|} \ln \lambda_{max}. \quad (4.19)$$

Pour visualiser des structures tourbillonnaires, le FTLE sera préféré aux méthodes analogues

eulériennes basées sur les invariants de $\nabla \mathbf{u}$ (vorticité, λ_2 , critère Q, etc.). De plus, ce critère est utilisé lors de la détection des structures lagrangiennes cohérentes, présentée à la prochaine section.

4.3.3 Structures lagrangiennes cohérentes

Les structures lagrangiennes cohérentes (LCS) sont des lignes matérielles particulières qui se déforment peu par rapport à leurs voisines dans les écoulements. Puisqu’elles agissent comme des barrières matérielles, car par définition elles ne peuvent être traversées, elles représentent des frontières entre des régions d’un écoulement qui ont des dynamiques distinctes. Elles permettent par exemple de délimiter les courants océaniques fort susceptibles de transporter une nappe de pétrole sur une côte terrestre (Olascoaga et Haller, 2012). Dans le cas d’un décollement, si on reprend l’exemple en 2D stationnaire, on constate bien que le profil de décollement sépare la région haute vitesse amont de la zone de recirculation basse vitesse aval. Le profil de décollement peut donc être défini par une LCS.

Les LCSs hyperboliques étaient traditionnellement définies géométriquement comme les crêtes de l’exposant de Lyapunov (FTLE, voir Shadden *et al.*, 2005) à condition que le taux d’étirement ne soit pas nul sur la ligne (ou surface en 3D, Haller, 2002). Récemment, Haller (2011) a précisé la définition des LCSs et a proposé une méthode d’extraction plus cohérente et plus pratique. À l’aide de cette nouvelle approche, une LCS hyperbolique est définie localement comme la ligne matérielle la plus répulsive (ou attractive) durant un intervalle temporel prédéfini (notons aussi qu’une théorie basée sur les courbes géodésiques généralisant le concept des LCSs aux lignes matérielles hyperboliques, paraboliques et elliptiques, est présentée dans Haller et Beron-Vera, 2012, mais pour le reste de cette thèse, le terme LCS se réfère aux LCSs hyperboliques puisque les autres types ne sont pas utilisés).

La pente du décollement $\theta_s(t)$ peut être calculée à partir de n’importe quelle condition $\theta_s(t_0)$ correspondant à une ligne matérielle $\mathcal{M}(t)$ contenant le point de décollement même si celle-ci ne coïncide pas avec le profil de décollement. Afin d’obtenir la ligne matérielle à t_0 qui coïncide avec le profil de décollement, la méthode de calcul d’une LCSs est décrite ici en suivant l’algorithme 5, suivant les recommandations présentées en détail par Farazmand et Haller (2012), qui proposent une application de la théorie variationnelle des LCSs développée et publiée dans Haller (2011). La méthode requiert le calcul du tenseur d’étirement de Cauchy–Green dont la valeur propre maximale et les vecteurs propres sont utilisés afin de visualiser le FTLE et d’identifier les LCSs (Haller, 2001; Shadden *et al.*, 2005). Sur une LCS, nous noterons les vecteurs propres ξ_1 et ξ_2 associés aux valeurs propres minimale λ_1 et maximale λ_2 du tenseur de Cauchy–Green, *c.-à-d.* les vecteurs propres tangents et perpendiculaires à

la ligne matérielle. Débutant des maximums locaux du champ FTLE, les lignes d'étirement sont calculées à l'aide de l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$\mathbf{x}' = \boldsymbol{\xi}_1(\mathbf{x}), \quad (4.20)$$

c.-à-d. de façon similaire au calcul de trajectoires, mais en utilisant les vecteurs propres au lieu des vecteurs vitesse.

Par définition, l'intégration de cette EDO garantit que les lignes d'étirement sont tangentes au champ de vecteurs propres $\boldsymbol{\xi}_1$ et aux lignes matérielles. À chaque pas de temps de l'intégration des lignes d'étirement, deux conditions doivent être respectées pour pouvoir considérer la ligne matérielle comme une LCS. La première condition assure que le taux de répulsion normal est plus important que le taux d'étirement tangentiel et consiste à valider que la plus grande valeur propre du tenseur de Cauchy–Green est plus grande que 1. Pour les écoulements incompressibles, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, donc cette condition est valide partout sauf aux points critiques dégénérés, soit lorsque le discriminant de la matrice hessienne s'annule. La deuxième condition vérifie que $\boldsymbol{\xi}_2$ est perpendiculaire aux crêtes locales (maximum) du champ FTLE :

$$\langle \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{x}_0), \mathcal{H}(\lambda_2) \boldsymbol{\xi}_2(\mathbf{x}_0) \rangle \leq 0, \quad (4.21)$$

où \mathcal{H} est la matrice hessienne, soit l'opérateur formé des dérivées partielles secondes.

Puisque les coordonnées cylindriques seront utilisées afin d'optimiser le calcul des dérivées spatiales autour du cylindre, la matrice hessienne en coordonnées cylindriques est présentée :

$$\mathcal{H}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

4.3.4 Méthode d'extraction des points selles

Les LCSs caractéristiques sont définies comme les lignes d'étirement qui maximisent la valeur moyenne du FTLE par rapport aux lignes d'étirement avoisinantes. Le taux d'étirement tangentiel est alors calculé sur chacune des lignes matérielles obtenues, et les points selles $\mathbf{x}_s(t)$ sont détectés où λ tend vers un maximum local en fonction du temps d'intégration. En pratique, l'exposant λ , défini par l'équation (4.10), est calculé pour tous les points de la LCS sur l'intervalle temporel $[t_0, t]$ et $\mathbf{x}_s(t_0)$ est déterminé où λ montre un maximum, détecté lorsque le temps d'intégration est suffisamment long. Notons que puisqu'au temps t_0 la LCS est définie par un nombre de points fixés, il est possible d'obtenir une précision

adéquate des vecteurs initiaux tangents et normaux afin de calculer la valeur initiale de λ . Cependant, lorsque les LCSs sont advectées en temps, cette précision spatiale diminue puisque les particules s'éloignent les unes des autres. Cette difficulté rend le calcul de l'angle moins précis, mais est contournée en utilisant l'équation (4.14) afin d'évaluer l'angle en temps, puisque $\theta(t)$ peut être calculé à l'aide de sa position initiale et des dérivées spatiales du champ de vitesse. Ceci diffère des méthodes antérieures présentées dans la littérature (voir, *e.g.* Farazmand et Haller, 2012; Olascoaga et Haller, 2012) qui nécessitent le calcul du gradient du champ de déformation à chaque instant, ce qui est effectué en transportant des points voisins en temps. Finalement, une fois le maximum de λ extrait à t , la position du point de décollement $\mathbf{x}_s(t_0)$ est évaluée en temps, tout comme l'angle du profil de décollement $\theta_s(t_0)$.

Les étapes globales du processus sont décrites à l'algorithme 5. Pour tous les résultats présentés dans cette thèse, les trajectoires des particules sont calculées en utilisant un schéma de type Runge–Kutta d'intégration explicite d'ordre 5.

```

Calculer l'exposant de Lyapunov en temps fini. (FTLE)
Calculer les lignes d'étirement :
for tous les points initiaux ( $\mathbf{x}_0$ ) do
    while  $\mathbf{x}$  respectent les conditions des lignes d'étirement (Eq. 4.21) do
        Résoudre EDO (Eq. 4.20)
    end while
end for
for LCSs à l'intérieur d'une région circulaire de rayon ( $r \simeq 0.1$ ) do
    Conserver les lignes matérielles qui maximisent la moyenne curviligne du FTLE
end for
Extraction des points selles :
for les lignes matérielles sélectionnées do
    Intégrer le taux d'étirement tangentiel (Eq. 5.2)
end for
Les points selles sont les positions qui maximisent la valeur de Eq. (5.2).
```

Algorithme 5 Extraction des points selles

Les différents paramètres limites utilisés dans le processus d'extraction sont détaillés et expliqués :

- pas d'intégration (Δs) : utilisé pour résoudre (4.20) ; peut être diminué afin d'augmenter la résolution spatiale des LCSs cependant ceci augmente le temps de calcul ($\Delta s \simeq [0.0001\delta_{\mathbf{x}}, 0.5\delta_{\mathbf{x}}]$, où $\delta_{\mathbf{x}}$ est la résolution spatiale de la grille). Il est aussi possible d'utiliser une méthode avec un pas d'intégration variable et ainsi conserver une

- erreur constante lors de l'intégration.
- longueur d'échec (l_f) : une condition ajoutée à la *boucle while* décrite à l'algorithme 5. La boucle est arrêtée lorsqu'une ligne d'étirement ne respecte pas les conditions Eq. (4.21) pour une longueur supérieure à ce paramètre.
- longueur minimale (l_{\min}) : utilisée dans la sélection des lignes matérielles après le calcul des lignes d'étirement afin d'éliminer les LCSs plus petites et peu caractéristiques de l'écoulement ($l_{\min} \simeq 1$).
- rayon (r) : utilisé après le calcul des lignes d'étirement, ce paramètre permet de filtrer les LCSs similaires dans une région circulaire de rayon défini par ce paramètre. Ajusté autour de $r \simeq 0.1$, il peut être augmenté afin de ne conserver que les LCSs les plus attractives.

4.4 Illustration de la méthode

La méthode de détection du point et de l'angle de décollement décrite à la section précédente sera illustrée sur l'écoulement autour du cylindre en rotation et en translation de la section 4.2 avec l'ajout d'une perturbation périodique en posant $\beta = 0.5$ et $\omega = 2\pi/5$. L'extraction du point et de l'angle du décollement est présentée à la figure 4.6. Le champ FTLE, calculé en temps négatif, est présenté à la figure 4.6(a) et permet de souligner la présence d'une LCS émanant de la paroi et qui s'enroule autour du cylindre. Le tenseur de Cauchy–Green doit être calculé afin d'obtenir le champ FTLE et est ensuite utilisé pour extraire la géométrie de la LCS obtenue de l'algorithme 5. Dans cet écoulement simple, une seule LCS est extraite. Ceci est un cas particulier, puisque généralement un grand nombre de lignes matérielles hyperboliques est obtenu (voir les résultats du chapitre 5). Comme on peut le remarquer, la ligne est en effet située près de la crête du maximum du champ FTLE (en blanc sur la Fig. 4.6) et possède une résolution spatiale assez précise. La figure 4.6(b) montre le calcul de λ sur la LCS lorsque la ligne est advectée en temps en fonction de la coordonnée curviligne initiale s et le temps d'intégration. Lorsque le temps augmente, un maximum apparaît et permet de retracer la position du point selle sur la LCS à l'instant initial $t = 0$. Ce point selle correspond au point de décollement mobile. Ce point est situé à $s = 0$, *c.-à-d.* en $x = 0$ sur la LCS présentée à la figure 4.6(a), ce qui confirme que le point de décollement est clairement situé au-dessus de la paroi solide.

Une fois la position et l'angle initiaux déterminés, leurs évolutions temporelles sont prédites. Les résultats sont présentés à la figure 4.7. On remarque que les particules de fluide suivent globalement la trajectoire du point critique sans traverser le profil de décollement dans la région rapprochée de ce point (ceci est moins vrai en périphérie puisque le profil n'est ap-

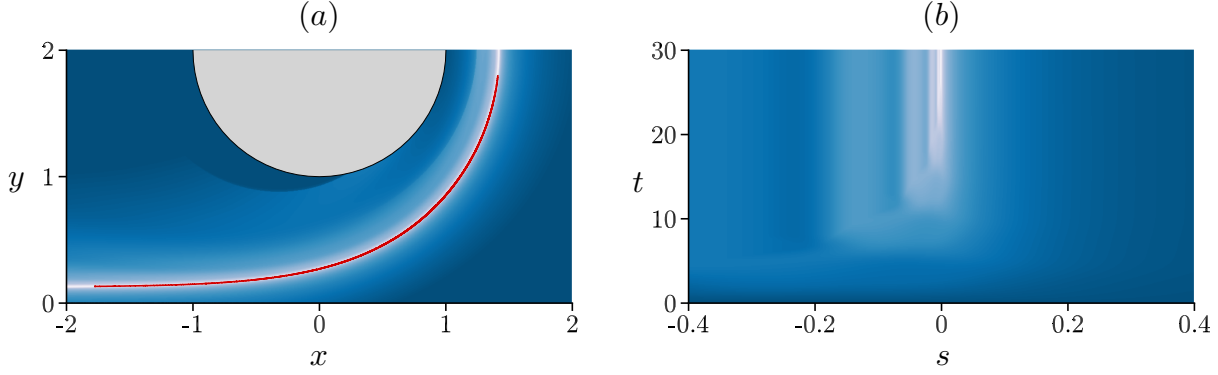


Figure 4.6 Extraction du point et de l'angle du décollement pour un écoulement défini par $U_0 = 0.3$, $\beta = 0.5$ et $\omega = 2\pi/5$. En (a), les contours du champ FTLE sont présentés (les niveaux augmentent du bleu au blanc) avec la LCS (rouge) extraite au temps $t = 0$ à l'aide de l'algorithme 5. $\lambda = \int_0^t S_{\parallel}(\tau)d\tau$, calculé en fonction de s , la coordonnée curviligne de la LCS au temps $t = 0$ normalisée par la longueur de la LCS, est présenté en (b) avec des isocontours (du bleu au blanc). L'origine de la coordonnée s correspond au point de la LCS en (a) où $x = 0$

proximité que par la pente du décollement). On remarque aussi que la trajectoire du point de décollement est découplée du mouvement du cylindre, *c.-à-d.* le point de décollement ne bouge pas en phase avec le cylindre, mais oscille près de celui-ci en suivant une trajectoire elliptique. Au contraire, le point selle eulérien, identifié à la figure 4.5(a), sera toujours situé sur l'axe vertical qui passe par le centre du cylindre encore une fois grâce à la symétrie des lignes de courant autour de ce même axe. Ceci illustre que le principe MRS, qui détecte les points critiques eulériens, ne peut capturer le décollement instationnaire qui par nature est lagrangien.

Plus de détails sur la cinématique du point de décollement sont présentés à la figure 4.8. À la figure 4.8(a), on observe que la position de x_s ne diffère que très légèrement du mouvement linéaire $U_0 t$. À la figure 4.8(b), le point et l'angle de décollement sont visualisés dans un repère se déplaçant à la vitesse U_0 pour trois instants différents. L'angle de décollement oscille, mais son amplitude est limitée. Les résultats montrés à la section 4.1 avaient indiqué que la dynamique du décollement fixe est plus lente que celle donnée par les champs de vitesse : le point de cisaillement nul change de position alors que le décollement est fixe, et le profil de décollement oscille peu dans l'écoulement malgré le déplacement important du cylindre. Ici, dans le cas mobile, la figure 4.8(b) montre de façon analogue que les points selles lagrangiens oscillent plus lentement que leurs homologues eulériens. L'écoulement étudié ici reste cependant relativement simple. Nous allons au chapitre 5, nous intéresser à des écoulements plus complexes, comme des écoulements tourbillonnaires.

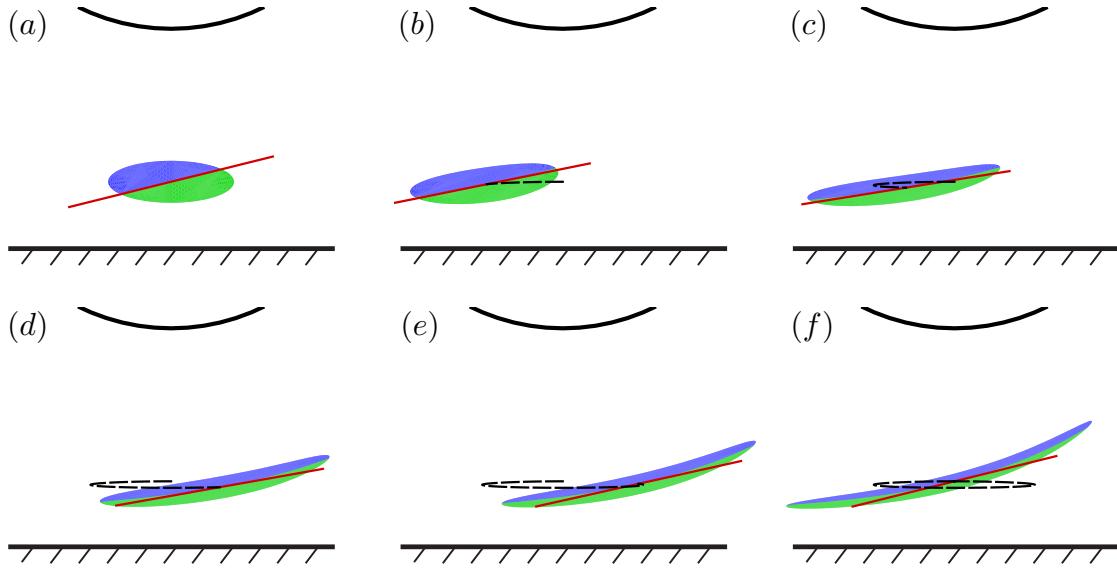


Figure 4.7 Prédiction du décollement mobile (repère du cylindre) avec $U_0 = 0.3$, $\beta = 0.5$ et $\omega = 2\pi/5$: (a) $t = 0$, (b) $t = T/5$, (c) $t = 2T/5$, (d) $t = 3T/5$, (e) $t = 4T/5$ et (f) $t = T$. La légende est la même qu'à la figure 4.5. La ligne pointillée indique la trajectoire du point de décollement

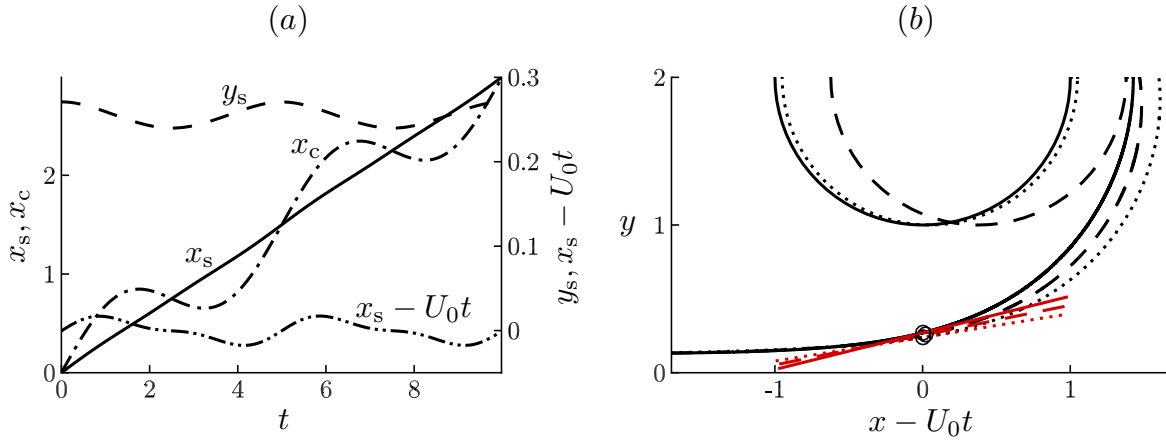


Figure 4.8 Suivi du point et du profil de décollement en temps. En (a), la trajectoire du point de décollement est tracée de plusieurs façons et comparée avec le mouvement du cylindre. En (b), la position du cylindre, le point de décollement et la LCS sont indiqués en noir dans un repère se déplaçant à la vitesse U_0 . De plus, la prédiction de la tangente du profil de décollement est indiquée en rouge. Ces caractéristiques sont présentées pour trois instants temporels et la légende des formats de lignes est : — $t = 0$; - - -, $t = 1$; ····, $t = 2.4$

CHAPITRE 5 APPLICATION SUR DES CHAMPS DE VITESSE NUMÉRIQUES

Ce chapitre présente l’analyse du décollement de trois écoulements numériques de complexité croissante obtenus par la méthode des éléments finis (voir Chap. 3). Le premier exemple est celui d’un cylindre en rotation soumis à un écoulement externe uniforme instationnaire. Deux décollements se produisent près de la paroi en mouvement de part et d’autre du cylindre. La configuration de l’écoulement permet de déceler la présence de deux points selles à l’intérieur de l’écoulement, qui semblent être intrinsèquement reliés aux phénomènes de décollement (Koromilas et Telionis, 1980).

Le deuxième écoulement est sans aucun doute celui le plus connu autour d’un cylindre, puisque c’est celui produit autour d’un cylindre fixe et qui génère les allées tourbillonnaires de von Kármán, nommées en l’honneur de l’ingénieur et physicien Théodore von Kármán. La vorticit   s’accumule à la surface et est ensuite éjectée alternativement, ce qui mène à la formation périodique de tourbillons asymétriques dans le sillage du cylindre. Il est généralement soutenu que les points de décollement oscillent sur la surface du cylindre (voir par exemple Ruban *et al.*, 2011), mais étonnamment, à notre connaissance, cela n’a jamais été clairement démontré. Au contraire, puisque le sillage est périodique, le point de décollement devrait être fixe dans l’espace, d’après Haller (2004).

Finalement, le troisième exemple est celui d’un jet impactant. Cet écoulement tourbillonnaire permet de montrer la robustesse de la méthodologie employée et permettra de faire le lien avec les écoulements expérimentaux présentés au chapitre 6.

5.1 Écoulement autour d’un cylindre en rotation

Dans cette section, le décollement de la couche limite près d’une paroi en mouvement est étudié en analysant l’écoulement autour d’un cylindre en rotation. Le cylindre a un diamètre $D = 2R$ et tourne autour de son axe à une vitesse angulaire Ω dans le sens antihoraire dans un champ de vitesse uniforme $U(t)$ fonction du temps. La vitesse transitoire à l’entrée est définie par la combinaison d’une vitesse moyenne U_0 et d’un terme sinusoïdal :

$$U(t) = U_0 + \beta \sin \omega t, \quad (5.1)$$

où β et $\omega = 2\pi/T$ sont respectivement l’amplitude et la fréquence angulaire d’oscillation. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = U_0 D / \nu$, avec ν la viscosité cinématique du fluide. Ce

cas est à rapprocher de l'écoulement généré par un cylindre en rotation et dont la translation est démarrée impulsivement, qui a beaucoup été abordé dans la littérature dans le cadre du critère MRS et de la formation des singularités.

Suivant la procédure décrite au chapitre 3, les équations de Navier-Stokes sont résolues numériquement pour générer la base de données de vitesse. Pour ce cas, un maillage structuré rectangulaire ($P3/P2$, *c.-à-d.* approximé en vitesse et en pression respectivement par des polynômes d'ordre 3 et d'ordre 2) est généré dans la zone d'intérêt principale autour du cylindre. Ce maillage permet l'obtention de résultats précis près de la paroi et simplifie le post-traitement, plus particulièrement le calcul des différentes composantes des dérivées cylindriques. Toutes les simulations transitoires présentées sont résolues à l'aide d'une formule de différentiation arrière de deuxième ordre (BDF) avec un pas de temps adaptatif.

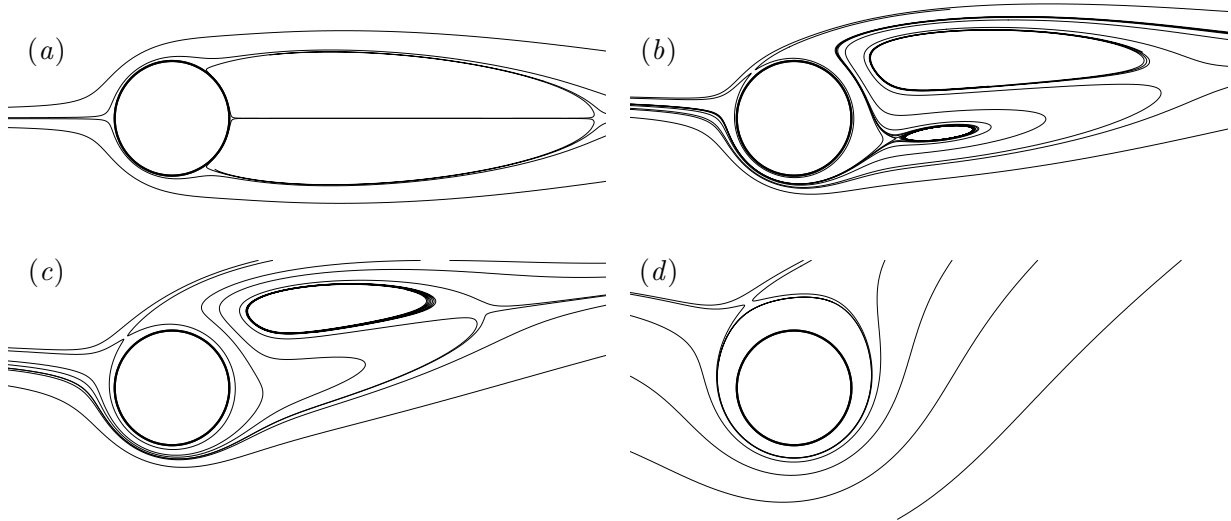


Figure 5.1 Lignes de courant autour d'un cylindre stationnaire (a) et d'un cylindre en rotation antihoraire à une vitesse $\Omega = 1.0$ (b), $\Omega = 1.5$ (c) et $\Omega = 7$ (d) dans un écoulement externe uniforme à $Re = 50$

Avant d'examiner l'écoulement transitoire, la figure 5.1 présente les caractéristiques des écoulements pour une condition d'entrée stationnaire ($\beta = 0$) à $Re = 50$ avec différentes vitesses angulaires Ω , incluant le cas d'un cylindre fixe. Tout comme observé expérimentalement par Koromilas et Telionis (1980) pour des vitesses angulaires faibles, la rotation du cylindre (antihoraire dans cet exemple) déplace le point de décollement supérieur en amont et le point inférieur en aval par rapport aux positions des points du décollement dans le cas d'un cylindre fixe. De plus, les deux points de décollement ne sont plus attachés à la paroi du cylindre, mais situés à l'intérieur de l'écoulement à une distance considérable de la paroi. Donc, chacun

des points peut être décrit comme un point selle des lignes de courant. Cependant, lorsque la vitesse angulaire devient importante par rapport à l'amplitude de la vitesse d'entrée, des changements drastiques apparaissent dans les structures de l'écoulement. Comme observé à la figure 5.1(c), la zone de recirculation inférieure disparaît complètement et le point selle est repoussé en aval dans la traînée du cylindre. Pour des vitesses encore supérieures (Fig. 5.1d), les deux zones de recirculation disparaissent et le point selle en amont du cylindre s'éloigne de la paroi du cylindre. Pour des raisons d'analyse, la condition présentée à la figure 5.1(b) est sélectionnée puisque deux points selles sont présents autour du cylindre. Il est cependant important de noter que la méthode permet d'extraire tous les points selles indépendamment des conditions d'entrées de l'écoulement.

Lorsque l'écoulement d'entrée est instationnaire, des structures similaires sont observées à différents instants de la période de l'écoulement, cependant les points selles deviennent mobiles (Ece *et al.*, 1984). Comme les trajectoires ne correspondent plus aux lignes de courant, il faut opter pour une théorie lagrangienne du décollement puisqu'aucun critère eulérien basé sur les lignes de courant ne permet de détecter ces points selles.

5.1.1 Détection des points selles lagrangiens

La position des points selles lagrangiens au temps t_0 est obtenue en capturant un point hyperbolique sur une LCS. En pratique, comme cela a été présenté au chapitre 4, ceci est effectué en détectant une structure lagrangienne cohérente (LCS) attractive, et en déterminant le point $\mathbf{x}_s(t_0)$ qui maximise le taux d'étirement tangentiel S_{\parallel} intégré sur toutes les trajectoires $\mathbf{x}(t_0)$ des points de la LCS initialement \mathbf{x}_0 . Le taux d'étirement est alors quantifié à l'aide de l'exposant λ , calculé sur l'intervalle temporel $[t_0, t]$:

$$\lambda(\mathbf{x}_0, t_0, t) = \int_{t_0}^t S_{\parallel}(\mathbf{x}_0, \tau) d\tau. \quad (5.2)$$

5.1.2 Décollement mobile près du cylindre

La figure 5.2 présente l'écoulement autour d'un cylindre en rotation similaire à celui montré à la figure 5.1(b), mais en présence d'un écoulement d'entrée pulsé avec $\beta = 1/4$ et $\omega = 2\pi$ (Eq. 5.1). À la figure 5.2(a), deux LCSs qui coïncident avec les crêtes du FTLE sont extraites. L'exposant λ , qui permet de quantifier le taux d'étirement tangentiel, est présenté à la figure 5.2(b) pour le point de décollement en aval. Les résultats permettent de montrer que plus le temps d'intégration t augmente, plus la valeur de l'exposant λ illustre l'existence d'un point maximisant le taux d'étirement, et permet l'extraction du point selle indiqué sur

la figure 5.2(a). La procédure est identique pour la deuxième LCS. Finalement, en calculant la tangente de la LCS en ce point, l'angle initial du profil de décollement peut être évalué.

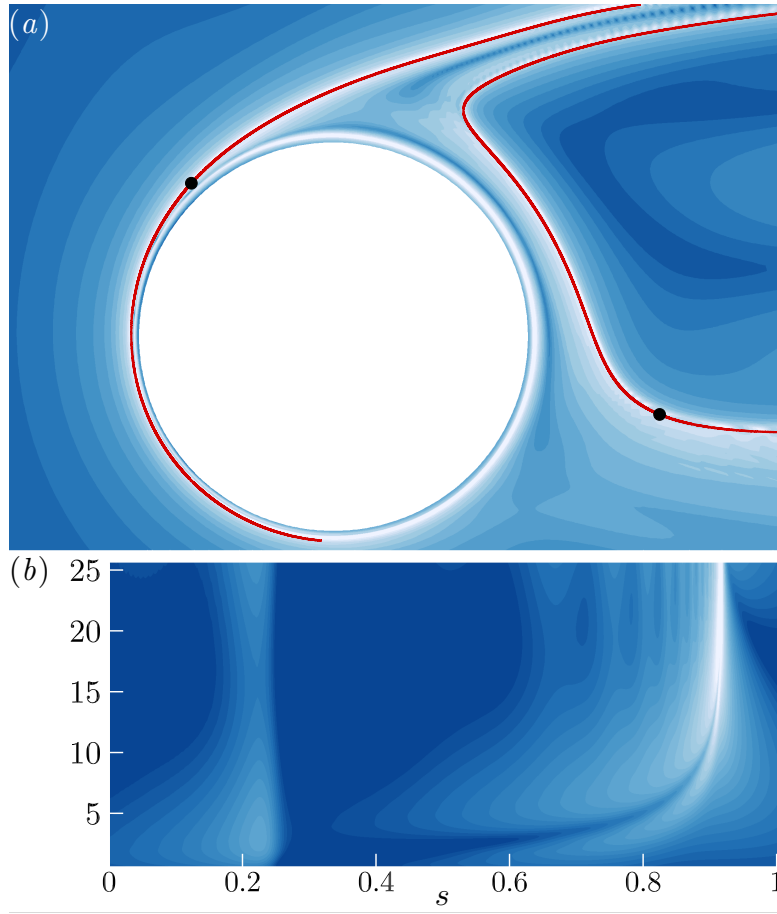


Figure 5.2 Caractéristique de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation avec $\Omega = 1.0$, $Re = 50$, $U_0 = 1$, $\beta = 1/4$ et $\omega = 2\pi$. Le champ FTLE ainsi que deux LCSs extraites sont présentés en (a). Les contours de λ calculés sur la LCS située en amont du cylindre sont présentés en (b) en fonction de la coordonnée curviligne s (orientée du haut vers le bas et normalisée par la longueur totale de la courbe) et le temps d'intégration t . Les points noirs en (a) correspondent aux points où l'exposant λ atteint un maximum pour chacune des LCSs (les valeurs croissantes de l'exposant sont présentées du bleu vers le blanc)

Le point de décollement ainsi que sa pente peuvent aussi être obtenus par une méthode alternative. En effet, puisque l'écoulement est périodique, la position des points selles est aussi périodique. Pour les détecter, on cherche les points lagrangiens qui au temps $t_0 + T$ se trouvent à la même position \mathbf{x}_s qu'au temps t_0 . En pratique, ces points peuvent être extraits en minimisant dans le domaine la fonction suivante :

$$d^2(\mathbf{x}_0, t_0) = \| \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0 + T) - \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t_0) \|^2, \quad (5.3)$$

et donc déterminer $\mathbf{x}_s(t_0)$.

De plus, le mouvement des profils de décollement doit aussi être périodique en temps. Les autres lignes matérielles qui passent par le point selle avec un angle différent sont soit attirées, soit repoussées par les profils de décollement. De la même façon que pour le point de décollement, l'angle initial du profil de décollement θ_s est déterminé en intégrant numériquement l'équation (4.14) sur la trajectoire du point de décollement pendant une période T sachant que :

$$\theta_s(\mathbf{x}_s(t_0 + T), t_0 + T) - \theta_s(\mathbf{x}_s(t_0), t_0) = 0. \quad (5.4)$$

Les résultats de l'équation (5.4) (obtenus de l'intégration de (4.14) pour tous les angles initiaux de $[0, 2\pi]$) sont présentés dans l'encadré de la figure 5.3(a) pour le point de décollement aval, où quatre angles θ_s sont obtenus (des résultats similaires ont été obtenus pour celui en amont). Ces quatre zéros correspondent aux deux angles recherchés ainsi que les angles complémentaires ($\pm\pi$) puisque les vecteurs tangents ne sont pas orientés par définition. Au temps initial $t = 0$, des particules sont distribuées à l'intérieur d'un cercle (centré au point de décollement) et colorées en fonction des régions délimitées par ces angles et centrées sur le point selle détecté. La tangente initiale des LCSs est calculée en résolvant l'équation (5.4). Ces valeurs initiales, accompagnées de l'ensemble des particules des zones colorées, sont ensuite advectées en temps à l'aide de l'équation (4.14) pour les angles et en calculant, pour chacune des particules, les trajectoires à l'aide des données de vitesse. Les résultats sont présentés aux figures 5.3(b-f). On peut alors remarquer que le comportement du décollement est bien prédit puisqu'aucune particule des zones colorées ne traverse les profils prédits dans la région avoisinante du point selle. Au contraire, on peut noter que le point selle eulérien, identifié à l'aide des lignes de courant instantanées (en vert), ne coïncide pas avec le point lagrangien ce qui démontre encore une fois qu'il ne peut être utilisé dans ce cas pour la définition du point de décollement mobile.

Ceci permet de montrer qu'une fois de plus, le principe MRS qui est basé sur des quantités eulériennes ne peut, par définition, capturer un point selle lagrangien dans un écoulement instationnaire. D'ailleurs, l'absence de point selle eulérien ne signifie pas nécessairement qu'un point selle lagrangien n'existe pas non plus, ce qui peut mener à de fausses interprétations et des analyses erronées pour certains écoulements.

Contrairement à ce qu'on peut à première vue observer à la figure 5.3, le point de décollement n'est pas fixe en espace, mais suit une trajectoire elliptique, présentée dans l'encadré de la figure 5.3(c). Cependant, ce mouvement est faible par rapport aux mouvements d'oscillation

des lignes de courant, ce qui le rend difficile à percevoir. La même remarque est valide pour les tangentes des profils; les angles varient en fonction du temps, mais leurs amplitudes sont limitées. De plus, une analyse du champ de vitesse à la surface du cylindre montre que la contrainte de cisaillement pariétal moyenne ne s'annule pas au voisinage du point selle, même en se positionnant dans un repère tournant avec le cylindre. Cela indique que la méthode présentée dans Surana et Haller (2008) ne peut être appliquée dans ce cas. Puisque le décollement n'est pas relié à une quantité de paroi, aucune des théories lagrangiennes existantes ne peut être appliquée.

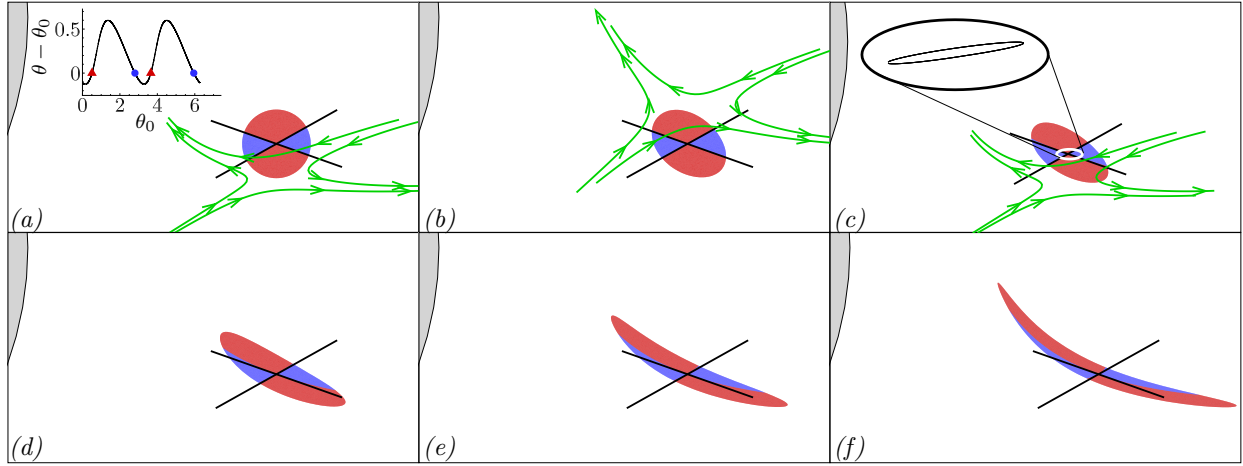


Figure 5.3 Évolution temporelle du point de décollement aval (le cylindre est représenté en gris) pour les mêmes conditions qu'à la Fig. 5.2. Les tangentes aux profils de décollement sont présentées en noir. Des particules sont initialement positionnées dans quatre régions délimitées par ces lignes, en rouge et bleu et advectées en temps. Les lignes de courant instantanées sont aussi présentées en vert. Les temps des différentes fenêtres sont (a) $t = 0$; (b) $t = 0.5T$; (c) $t = T$; (d) $t = 2T$; (e) $t = 3T$; (f) $t = 4T$. En (a) est présentée la méthode utilisée afin d'obtenir les angles en déterminant les zéros de $\theta(\mathbf{x}_s, t_0 + T) - \theta_0(\mathbf{x}_s, t_0)$ (voir Eq. 5.4). Les angles initiaux $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ sont affichés par des symboles. La figure (c) montre un zoom de l'orbite elliptique du point de décollement

Cet exemple a été obtenu pour un nombre de Reynolds relativement faible ($Re = 50$). Pour des valeurs de Re plus élevées, l'apparition de tourbillons se détachant de la surface du cylindre augmente la complexité de l'écoulement. Ceci est exploré à la prochaine section avec un cylindre stationnaire.

5.2 Écoulement autour du cylindre fixe

Cette section vise à clarifier le décollement instationnaire se produisant derrière un cylindre fixe, *c.-à-d.* sans rotation, dans un écoulement transverse uniforme de vitesse U . Les insta-

bilités du sillage derrière le cylindre génèrent, pour Re assez élevé, les bien connues allées de von Kármán. En plus du nombre de Reynolds $Re = UD/\nu$, l'écoulement est caractérisé par le nombre de Strouhal $St = fD/U$ avec $f = 1/T$ la fréquence de détachement des tourbillons (de période T). Le sillage instationnaire derrière le cylindre est périodique et selon la théorie présentée dans Haller (2004), le point de décollement devrait être fixe en espace et c'est ce que nous validerons à la prochaine section.

5.2.1 Décollement formé par le détachement tourbillonnaire

D'après Haller, dans un écoulement périodique, le décollement se produit à la paroi solide, à l'endroit où le frottement pariétal, moyenné sur une période T , est nul. Afin d'obtenir le profil instationnaire du décollement, la théorie de Haller (2004) a d'abord été adaptée pour les coordonnées polaires (r, θ) , où $r + R$ est la distance radiale du centre du cylindre et θ est l'angle mesuré dans la direction antihoraire à partir de l'axe horizontal en aval du cylindre.

Si $u(r, \theta, t)$ et $v(r, \theta, t)$ sont les composantes de la vitesse dans les directions azimutale et radiale, pour un écoulement incompressible le point de décollement est situé où

$$\int_0^T u_r(0, \theta_s, t) dt = 0, \quad (5.5)$$

où le décollement est situé en $(0, \theta_s)$ et u_r est la dérivée radiale de u . Le profil de décollement instationnaire $\theta(r, t)$ est alors défini avec la relation :

$$(r + R)(\theta(r, t) - \theta_s) = rF(r, t), \quad (5.6)$$

où F est écrit sous la forme d'un développement en série de Taylor au voisinage du point de décollement :

$$F(r, t) = f_0(t) + rf_1(t) + \frac{1}{2}r^2f_2(t) + \dots \quad (5.7)$$

La procédure de calcul des coefficients f_n est alors similaire à celle décrite dans Haller (2004). Afin d'obtenir le profil décrit par l'équation (5.7), l'équation (5.6) est dérivée en temps en utilisant les relations cinématiques $u = (r + R)\dot{\theta}$ et $v = \dot{r}$, et une équation différentielle est alors déterminée pour F . Chacun des coefficients f_n peut être calculé en dérivant successivement cette équation par rapport à r , en évaluant à la paroi ($r = 0$) et en utilisant les mêmes hypothèses que l'angle et la courbure du profil sont bornés. Les résultats obtenus sont similaires aux formules données par Haller pour les coordonnées cartésiennes présentées au chapitre 2. Par exemple, lorsque les composantes de la vitesse et de leurs dérivées spatiales

sont déterminées au point de décollement, les deux premiers coefficients sont :

$$f_0(t) = \frac{\int_0^T \left[u_{rr}(\tau) - 3v_{rr}(\tau) \int_t^\tau u_r(s) ds \right] d\tau}{3 \int_0^T v_{rr}(\tau) d\tau} \quad (5.8)$$

et

$$f_1(t) = \frac{\int_0^T \left(u_{rrr}(\tau) - 4v_{rrr}(\tau)f_0(\tau) - \frac{6}{R}v_{rr\theta}f_0^2(\tau) - 6v_{rr} \int_t^\tau [u_{rr}(s) - 3v_{rr}(s)f_0(s)] ds \right) d\tau}{12 \int_0^T v_{rr}(\tau) d\tau}. \quad (5.9)$$

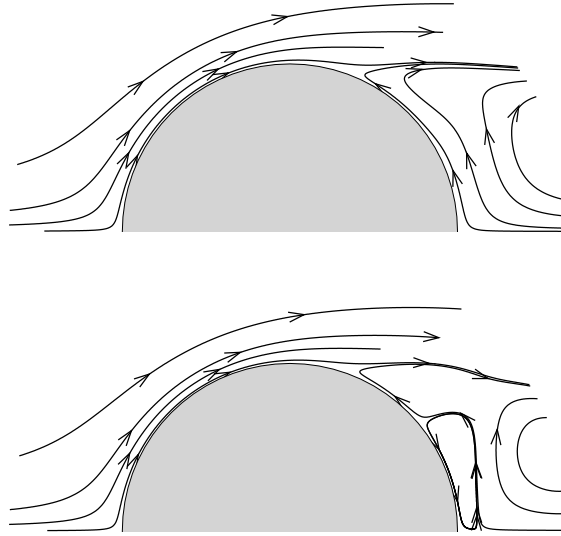


Figure 5.4 Lignes de courant obtenues de l'écoulement moyenné sur une période de détachement tourbillonnaire T (haut, $Re = 200$; bas, $Re = 350$) dans le cas d'un cylindre fixe

Pour $Re = 200$, le cisaillement moyen (calculée sur une période de détachement tourbillonnaire T) est nul en quatre points à la surface du cylindre (voir Fig. 5.4, haut). Un des points correspond au point d'arrêt moyen situé en amont du cylindre. Un autre point est situé derrière le cylindre et correspond à un point de recollement moyen. Les deux autres points sont symétriques et localisés à un angle de $\pm 69^\circ$ du point derrière le cylindre, et correspondent aux points de décollement des tourbillons. La figure 5.5 présente deux points de décollement (fixes en temps) et les profils (transitoires) en fonction du temps. Sans grande

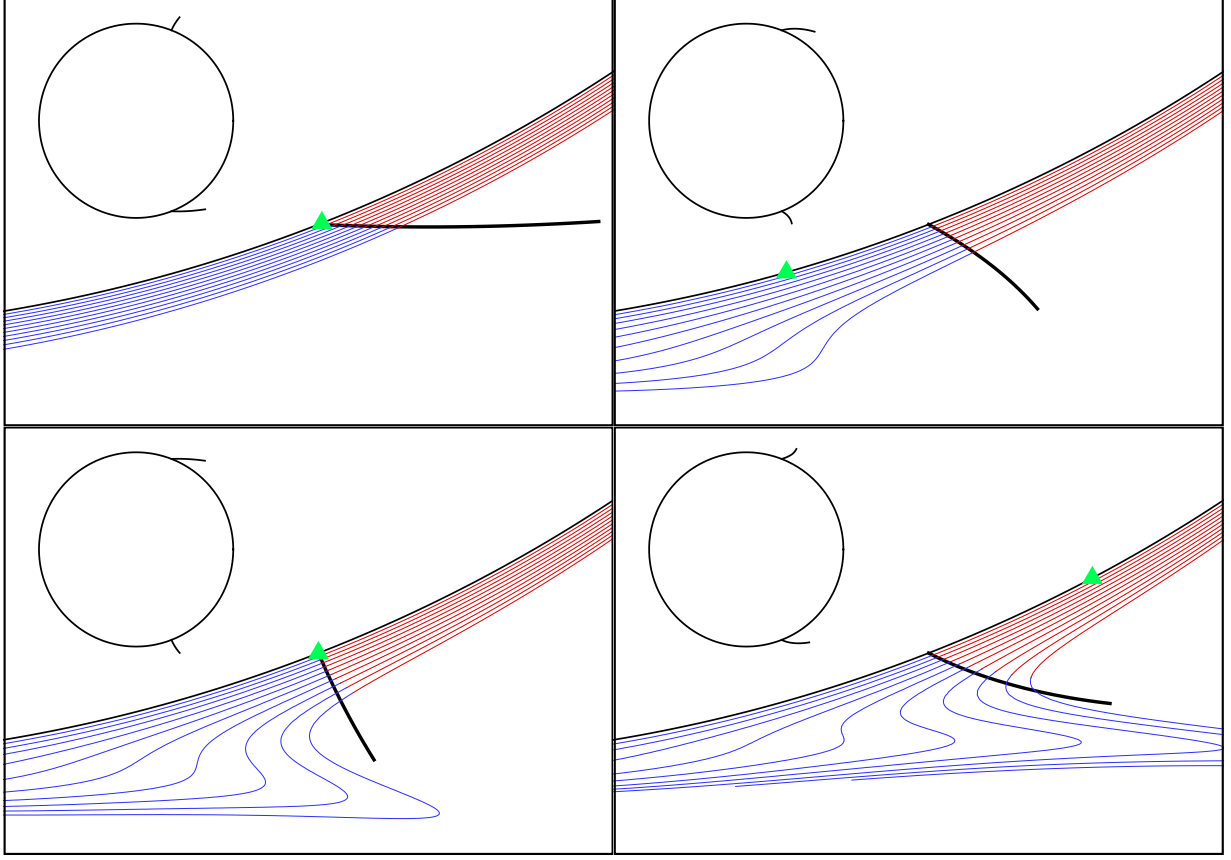


Figure 5.5 Analyse des mécanismes de décollement des allées tourbillonnaires de von Kármán pour $Re = 200$. Dans cette succession de figures, de gauche à droite, le temps augmente et le délai entre deux figures consécutives est de $\Delta t = T/4$. Le profil de décollement est présenté pour les points de décollement inférieur et supérieur dans les encadrés des sous-figures. Les structures du décollement inférieur sont visualisées à l'aide de particules colorées en fonction de leur position initiale par rapport au profil théorique (courbe noire) et advectées en temps. Le point de cisaillement pariétal instantané nul est indiqué par un triangle vert

surprise, puisque le détachement tourbillonnaire se produit en opposition de phase, les profils de décollement montrent aussi un décalage de phase dans leur évolution temporelle. Le décollement inférieur est détaillé à l'aide de lignes matérielles, formées de centaines de particules, initialement alignées avec la paroi du cylindre (*c.-à-d.* positionnées sur des rayons constants). La couleur dépend de la position initiale des particules par rapport au profil de décollement, qui est calculé au deuxième ordre à l'aide des termes $f_0(t)$ et $f_1(t)$. On observe que le mouvement des particules près du décollement est bien prédit par la théorie et en particulier qu'un pic se développe en amont du vrai point de décollement, ce qui est caractéristique des mécanismes de décollement visualisés à l'aide d'une approche lagrangienne (Haller, 2004, et comme nous l'avons évoqué au chapitre 4). Une meilleure précision pourrait être obtenue à

l'aide de termes d'ordre supérieur lors du calcul du profil de décollement. En revanche, la position du cisaillement instantané nul (triangle vert) oscille autour du vrai point de décollement et est clairement décorrélée du mécanisme, comme en témoignent plusieurs études (Sears et Telionis, 1975).

Lorsque le nombre de Reynolds augmente à $Re = 350$, l'écoulement moyen montre une organisation différente. Présenté au bas de la figure. 5.4, le point de stagnation et le point de décollement supérieur associé au tourbillon relâché du haut du cylindre sont toujours présents. Par contre, le point de recollement derrière le cylindre est maintenant un point de décollement et un autre point de recollement est situé plus haut. Le phénomène autour de ce dernier point, présenté à la figure 5.6, démontre que la théorie est aussi valide dans le cas d'un recollement instationnaire (Haller, 2004). Une nouvelle fois, la position des particules est bien prédite par la théorie, surtout près de la surface du cylindre et notons encore une fois que le profil n'est calculé qu'au deuxième ordre. De plus, tout comme pour un nombre de Reynolds plus faible, le point de cisaillement nul (triangle vert) n'est pas relié au vrai point de décollement. L'analyse du point de décollement derrière le cylindre est cependant plus délicate.

5.2.2 Phénomène de décollement derrière le cylindre à $Re = 350$

Afin de comprendre les mécanismes du décollement derrière le cylindre qui apparaît lorsque le nombre de Reynolds est augmenté à $Re = 350$ (voir Fig. 5.4), la figure 5.7 présente l'évolution temporelle de particules près de la paroi afin de visualiser l'écoulement derrière le cylindre. La présence de décollements sur les parties supérieure et inférieure du cylindre est clairement illustrée et bien prédite par la théorie (les profils ne sont pas présentés pour ce cas). De plus, une autre ligne matérielle attractive se crée près de la surface en aval du cylindre, ce qui n'était pas observé à $Re = 200$. On remarque le mouvement des particules qui oscillent d'un côté du sillage à l'autre. Cependant, il est difficile de déterminer si la ligne matérielle formée de ces particules est reliée à un point de décollement fixe ou mobile, ou simplement d'identifier les mécanismes physiques en jeu puisque les particules ne sont pas clairement éjectées de la surface du cylindre. Certaines particules qui initialement s'éloignent de la paroi semblent s'approcher à une étape de temps subséquent, comme illustré sur la dernière rangée de la figure 5.7.

Un comportement similaire avait été observé dans Surana et Haller (2008) et avait été traité comme un point de décollement mobile. Par conséquent, l'analyse effectuée à la section 5.1, pour capturer le point de décollement mobile dans le cas d'un cylindre en rotation, a été appliquée au cas du cylindre fixe. Les résultats sont présentés aux figures 5.8 et 5.9. La

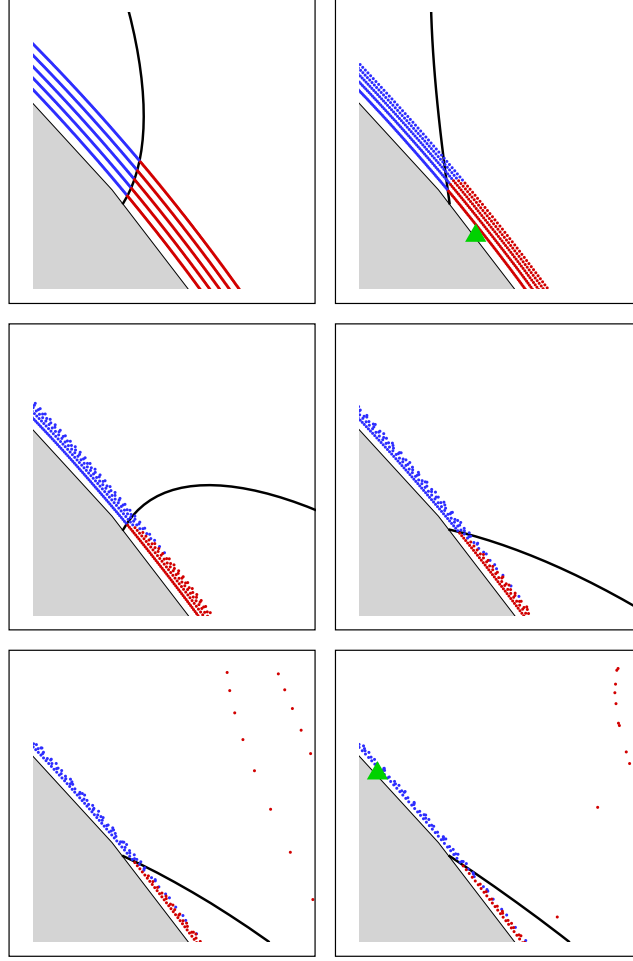


Figure 5.6 Prédiction théorique du profil de décollement pour $Re = 350$ ($\Delta t = 5T/6$). Les triangles verts indiquent la position où le cisaillement pariétal instantané est nul

figure 5.8 présente les contours du champ FTLE et deux LCSs caractéristiques obtenues près des points d'intérêt, extraites à l'aide de la méthode présentée à la section 5.1.1. La LCS supérieure est analysée en détail à la figure 5.9. Plus précisément, la figure 5.9(a) présente les contours de λ en fonction du temps d'intégration t et la coordonnée curviligne s sur la LCS. Contrairement au cas d'un cylindre en rotation (voir Fig. 5.2), plusieurs points selles semblent apparaître cycliquement lorsque t augmente. Un premier point, représenté par un carré, est identifié par un maximum local de λ . Pour les instants ultérieurs, d'autres points critiques sont identifiés, le troisième est sélectionné pour fins d'analyse et est représenté par un triangle.

La figure 5.9(b) présente les mêmes données qu'en (a) à l'exception que ce sont les contours des valeurs instantanées de S_{\parallel} qui sont visualisées au lieu de l'intégrale temporelle de λ . La figure ne montre que deux contours différents autour de $S_{\parallel} = 0$, ce qui permet d'analyser les

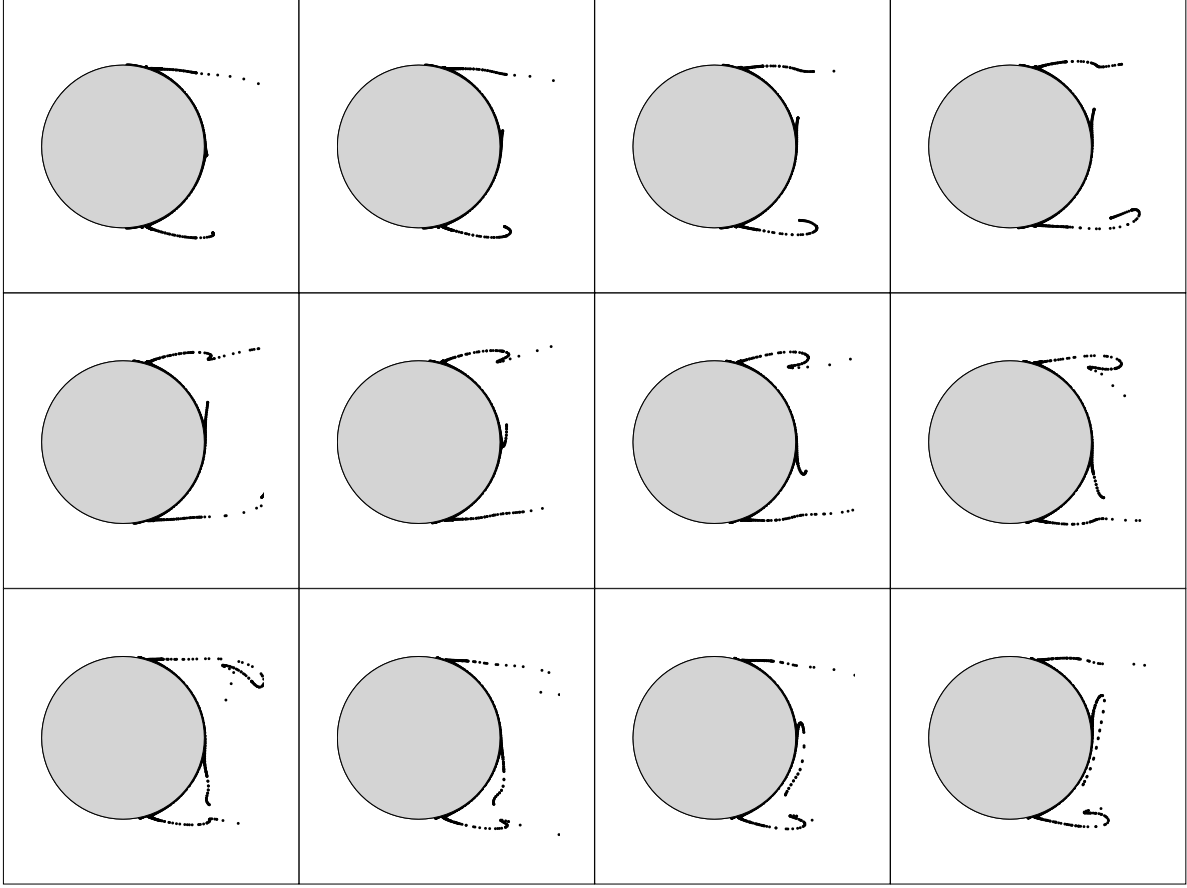


Figure 5.7 Visualisation de particules dans le sillage du cylindre pour $Re = 350$. Dans cette succession de figures, de gauche à droite, le temps augmente et le délai entre deux figures consécutives est de $\Delta t \simeq T/10$

changements de signes de S_{\parallel} . On remarque que le point identifié par un carré à la figure 5.9(a) est initialement caractérisé par une valeur positive de S_{\parallel} . Par la suite, la valeur de S_{\parallel} alterne entre des valeurs positives et négatives, ce qui indique un changement de signe cyclique du taux d'étirement en fonction du temps.

L'évolution de la trajectoire du point identifié par un carré est présentée aux figures 5.9(c-f) pour différents instants, accompagnée en vert de deux points voisins issus de la même LCS. On remarque que lorsque le temps augmente, la distance séparant le point bleu et les deux points voisins augmente. À l'opposé, les points représentés par des triangles verts, entourant le point d'intérêt représenté par un triangle bleu, s'éloignent de celui-ci aux figures 5.9(c) et (d), pour ensuite s'en approcher entre (d) et (e) et finalement s'en éloigner de nouveau entre (e) et (f). Ceci illustre bien le changement cyclique du signe de S_{\parallel} et remet en question si ce phénomène est bien un décollement. En effet, en examinant le mouvement des

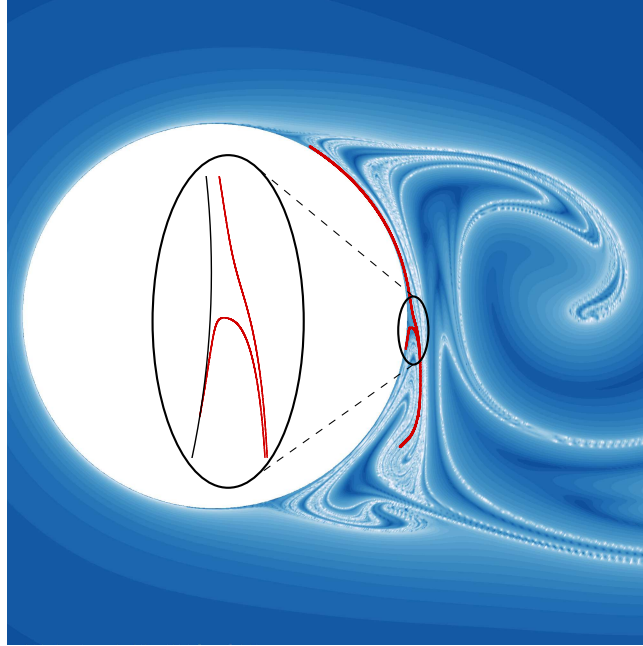


Figure 5.8 Visualisation du champ FTLE accompagné de LCSs caractéristiques (lignes rouges) pour l'écoulement à $Re = 350$. Un zoom permet de mieux percevoir les détails derrière le cylindre des deux lignes matérielles positionnées de part et d'autre du point critique

particules sur de longues périodes, on remarque qu'elles ne sont pas clairement éjectées de la paroi du cylindre, mais dans certains cas s'en approchent. Cependant, elles sont lentement déplacées vers l'un des points de décollement fixe et pour un temps suffisamment important, elles sont finalement éjectées des alentours du cylindre dans le sillage. Une caractéristique particulièrement intéressante de ces points est qu'ils conservent leur hyperbolicité durant leur mouvement. Illustré à la figure 5.9(a), par exemple pour le point identifié par un carré, la coordonnée pour laquelle λ atteint un maximal local ne change pas en fonction du temps, donc même détaché du cylindre, le point reste un point selle, ce qui est une propriété tout à fait remarquable qui illustre la grande cohérence des structures lagrangiennes, tandis que les particules à proximité sont dispersées de façon chaotique. Des résultats similaires ont été obtenus pour la deuxième LCS identifiée à la figure 5.8. La cinématique des points selles et des LCSs est exactement la même, mais décalée d'une demi-période en temps puisque le mouvement des deux LCSs est en opposition de phase.

Ces résultats montrent qu'un phénomène de décollement complexe se développe dans le sillage du cylindre. Cependant, pour de grandes échelles de temps, tous les points matériels finissent par être éjectés de la surface du cylindre, de sorte que les véritables points de décollement ne peuvent pas être définis. Nous sommes donc peut-être tout simplement en présence d'un cas

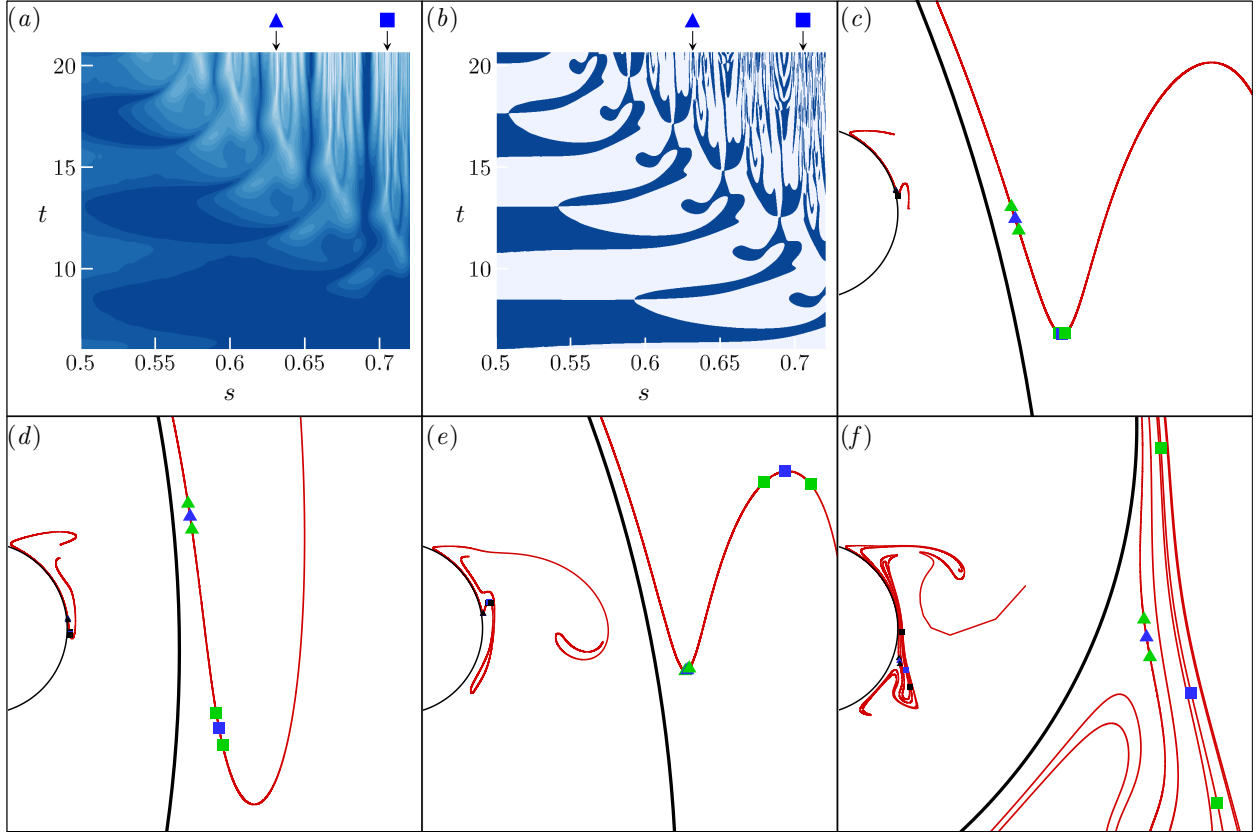


Figure 5.9 Détails de la cinématique de la LCS située dans la partie supérieure du cylindre identifiée à la figure 5.8. En (a), $\lambda = \int_0^t S_{||} d\tau$ est tracé en fonction de t et la coordonnée curviligne s le long des LCSs (orientée du haut vers le bas, voir figure 5.8), tandis qu'en (b) la valeur instantanée de $S_{||}$ est visualisée. Seulement deux contours sont utilisés afin de distinguer les valeurs négatives (en bleu foncé) des valeurs positives (bleu clair). (a) et (b) permettent de détecter les points caractéristiques qui sont identifiés par un carré et un triangle. La position de ces points est indiquée par un symbole bleu et visualisée dans le temps à $t = 2.8$ s (c), à $t = 4.9$ s (d), à $t = 7.4$ s (e) et à $t = 10.9$ s (f), avec deux points voisins indiqués en vert ainsi que la LCS complète en rouge. Pour chacune des figures représentant différents instants, sur la gauche la LCS est affichée entièrement derrière le cylindre et est détaillée autour des points caractéristiques sur la droite. Les lignes noires correspondent à la surface du cylindre

de décollement fixe. Ceci est précisé en examinant les résultats présentés à la figure 5.10. La théorie du décollement fixe pour les écoulements périodiques en temps (Haller, 2004) a été appliquée au décollement mobile apparent derrière le cylindre. Comme on peut l'observer, ce qui a d'abord été pris pour un décollement mobile est en fait bien prédit par la théorie qui localise le point de décollement exactement à l'arrière du cylindre puisque, par symétrie, ce point est celui où le cisaillement de paroi, moyenné sur la période des tourbillons éjectés,

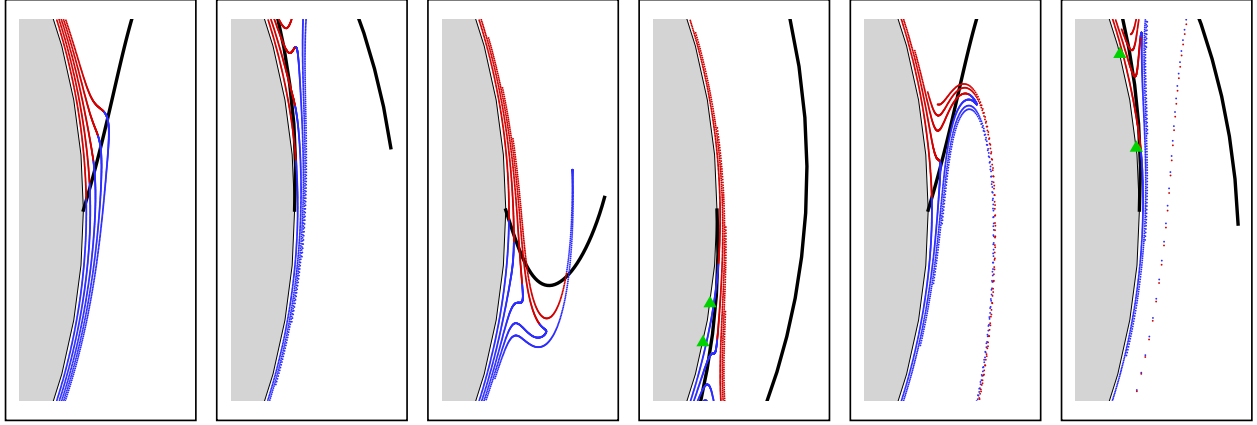


Figure 5.10 Prédiction du profil de décollement derrière le cylindre pour $Re = 350$ à l'aide de la théorie d'un point de décollement fixe (Haller, 2004). Le temps entre chacune des images est $\Delta t = T/4$ et les points où le frottement pariétal instantané est nul sont indiqués par des triangles verts

s'annule (voir Fig. 5.4). Le profil de décollement, présenté à la figure 5.11, est toutefois très complexe et possède une courbure importante, il est alors évident qu'une approximation de second ordre, telle que celle calculée ici, n'est probablement pas suffisante afin de capturer toutes les subtilités du véritable profil de décollement. Néanmoins, on peut noter que la dynamique du décollement, révélée par l'advection en temps de particules initialement situées à proximité de la paroi du cylindre, est parfaitement prédite par la théorie (voir Fig. 5.10). Au contraire, le champ de cisaillement instantané est complètement décorrélé du mécanisme de décollement, montrant même par intermittence la présence de deux positions (triangles verts) où le cisaillement est nul à proximité du véritable point de décollement.

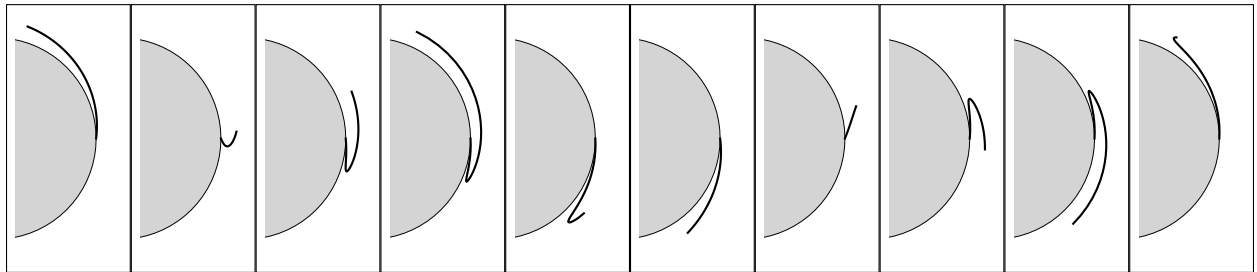


Figure 5.11 Vue globale du profil de décollement présenté à la figure 5.10 pour une période avec un délai de $\Delta t = T/10$

5.3 Bilan des résultats sur l'écoulement autour du cylindre

Différents mécanismes de décollement se produisant autour d'un cylindre ont été étudiés en présence de différentes conditions d'écoulement externes. Dans le cas le plus simple d'un écoulement uniforme, le décollement périodique qui mène à la formation des allées tourbillonnaire de von Kármán peut être complètement prédit par la théorie lagrangienne établie par Haller (2004) qui démontre plus particulièrement que les points de décollement sont fixes en espace, contrairement à ce que l'on retrouve dans la littérature.

En forçant la rotation du cylindre autour de son axe à une vitesse constante, les points de décollement ne sont plus attachés à la paroi, mais se comportent comme des points selles lagrangiens à l'intérieur de l'écoulement. Un point selle est situé en aval du cylindre, loin de la paroi, et ne peut plus être considéré comme un point de décollement, mais apparaît plutôt comme un point hyperbolique qui peut être capturé en détectant les structures lagrangiennes cohérentes. L'autre point selle, capturé de la même manière, est au contraire très près de la surface du cylindre. Cependant, on remarque qu'il ne peut être détecté avec des quantités pariétales, donc aucune théorie existante ne peut le prédire.

L'écoulement a aussi été perturbé en ajoutant un terme sinusoïdal à l'écoulement libre. Dans ce cas, les points selles lagrangiens peuvent être suivis de manière similaire et il est démontré que ceux-ci ne coïncident pas avec leurs homologues eulériens, *c.-à-d.* les points selles déduits des lignes de courant instantanées. En conséquence, le principe MRS, stipulant que le point de décollement est situé à l'endroit où la composante du cisaillement parallèle à la paroi s'annule ne peut s'appliquer dû à sa nature eulérienne.

Les écoulements détaillés aux sections précédentes restent finalement encore relativement simples. Le cas du cylindre fixe à $Re = 350$ n'est en outre pas physique, car à ce régime, l'écoulement est déjà turbulent. Nous allons maintenant nous focaliser sur des écoulements plus physiques, en poursuivant nos analyses avec l'écoulement tourbillonnaire généré par l'impact d'un jet laminaire sur une plaque plane perpendiculaire à l'axe principal du jet.

5.4 Écoulement du jet impactant

L'écoulement d'un jet impactant a été le sujet de plusieurs études en raison de son importance dans le milieu industriel et en dynamique des fluides fondamentale, particulièrement dans les systèmes de refroidissement, de mélange et de chauffage.

L'écoulement, malgré sa géométrie simple, comporte un grand nombre de mécanismes complexes. L'un d'eux concerne la formation d'un phénomène de décollement instationnaire.

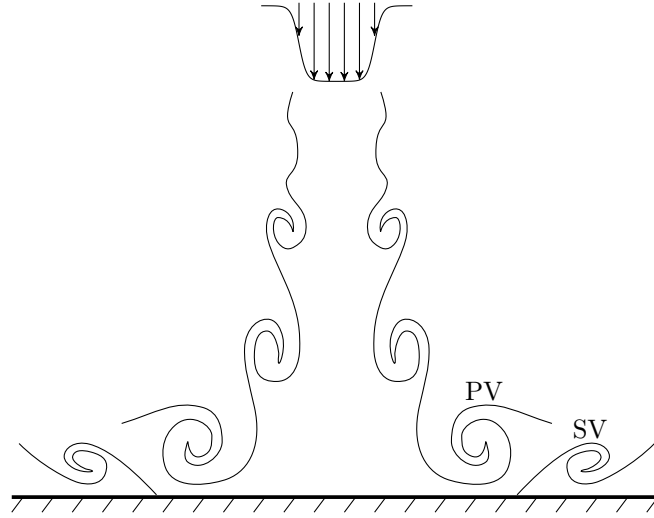


Figure 5.12 Mécanisme du décollement instationnaire d'un jet impactant où PV et SV sont les acronymes des tourbillons primaire et secondaire (*primary* et *secondary vortex*) (adapté de Didden et Ho, 1985)

Schématiquement présenté à la figure 5.12, lorsqu'un tourbillon primaire (PV : *Primary Vortex*) créé dans la couche de mélange du jet approche la paroi, un gradient de pression adverse est induit à la frontière entraînant la formation d'une couche de cisaillement. Cette couche de cisaillement est instable et entraîne la génération d'un tourbillon secondaire (SV : *Secondary Vortex*) en rotation dans le sens inverse du tourbillon primaire (une description en détail du phénomène est présentée dans Dairay *et al.*, 2015, et au chapitre 3). Simultanément un décollement instationnaire est généré dans la région près de la paroi, qui se déplace alors avec le tourbillon primaire. Ce scénario, bien que périodique, implique la présence d'un décollement qui apparaît et disparaît, et qui doit donc être considéré comme un cas de décollement mobile. Selon les mesures effectuées par Didden et Ho (1985) dans un jet forcé (acoustiquement), ils déterminent que le cisaillement pariétal est positif en tout temps près de la formation du tourbillon secondaire, ce qui invalide l'utilisation de la position où le cisaillement est nul comme critère de détection du décollement.

La méthodologie de post-traitement présentée au chapitre 4 est donc appliquée au cas d'un écoulement bidimensionnel plan d'un jet impactant. Les conditions de l'écoulement sont simples, mais suffisantes afin de créer un décollement instationnaire intéressant. La méthode des éléments finis, décrite au chapitre 3, est utilisée afin de résoudre le champ de vitesse de l'équation de Navier–Stokes. La distance entre la buse et la paroi est de $10 D$, où D est la largeur du jet. Le domaine de calcul rectangulaire mesure $50 D$ dans la direction parallèle à la plaque, est symétrique par rapport à l'axe central du jet, et $10 D$ dans la direction trans-

verse. Une condition de non-glissement est imposée à la paroi et sur la frontière supérieure. Aux sections latérales, une condition minimisant l'influence de la troncature du domaine est imposée (voir Dong *et al.*, 2014, pour plus de détail). Afin de déclencher une instabilité, un profil de vitesse comportant un point d'inflexion, formé à l'aide d'une tangente hyperbolique, est imposé sur la vitesse à la sortie de la buse :

$$U(x) = -\frac{U_a}{2} \left[1 + \tanh \left(5 - \frac{10|x|}{D} \right) \right] \quad (5.10)$$

où $x = 0$ est situé sur l'axe de symétrie du jet et U_a est la vitesse du jet sur ce même axe. Le maillage, composé d'éléments quadrilatères quadratiques, est raffiné près de la paroi. Le nombre de Reynolds est défini par $Re = U_a D / \nu$ et est fixé à $Re = 500$. La figure 5.13 présente

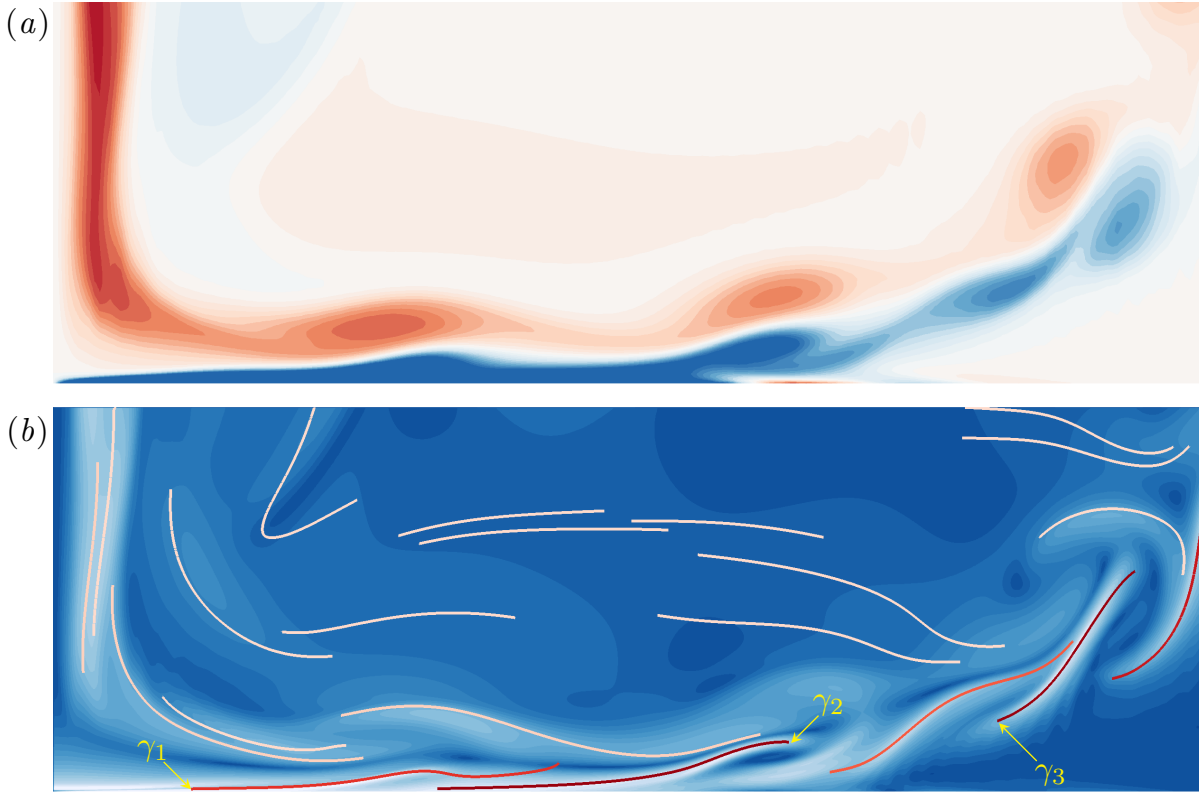


Figure 5.13 Visualisation de la région impact e d'un jet vertical. (a) Contours de la vorticité (le bleu et le rouge correspondent respectivement à une rotation horaire et antihoraire). (b) Les lignes mati rielles sont colorées par la moyenne curviligne du FTLE (la légende présente les valeurs croissantes du rouge p le au rouge foncé) et sont superpos es aux contours du FTLE (du bleu vers le blanc)

la région de formation du tourbillon secondaire.   la figure 5.13(a), le tourbillon principal est mis en évidence à l'aide des contours négatifs de vorticité (rotation antihoraire), tandis

que le mouvement près de la paroi génère une couche de cisaillement locale avec une vorticité de signe opposé (rotation horaire). Lorsque les instabilités de la couche de cisaillement sont suffisamment d velopp es, les tourbillons secondaires apparaissent en aval et s'élèvent de la paroi, générant ainsi un phénomène de décollement instationnaire.

La figure 5.13(b) présente les contours du champ FTLE accompagnés des LCSs extraites. On remarque que les LCSs ne sont pas nécessairement des crêtes du champ FTLE, et inversement, les maximums locaux du FTLE ne correspondent pas nécessairement à des LCSs (Haller, 2011). Cependant, la plupart des LCSs hyperboliques sont près des maximums locaux du FTLE. Ces LCSs sont dynamiquement reli es à la formation, au développement et à la dynamique des tourbillons présents à la figure 5.13(a). En particulier, deux d'entre elles, d not es γ_1 et γ_2 , sont d tect es dans la région près de la paroi ainsi qu'une 3  (γ_3) situ e en aval de celles-ci.

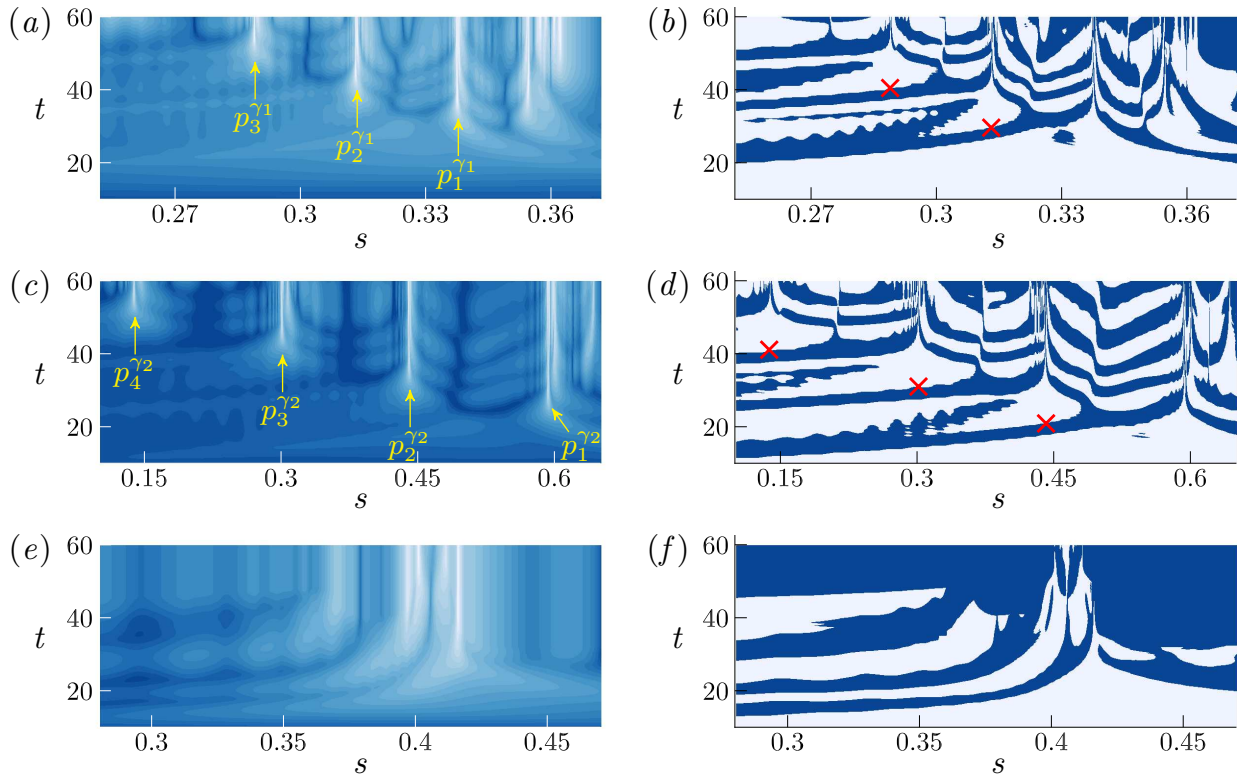


Figure 5.14 Contours de $\lambda = \int_0^t S_{\parallel}(\tau) d\tau$ et les valeurs instantan es du taux d'étirement tangentiel en fonction de la coordonnée curviligne normalis e s , orient e de gauche à droite) en fonction du temps d'intégration t . (a,b) correspondent aux LCSs identifi es par γ_1   la figure 5.13(b), (c,d)   γ_2 et (e,f)   γ_3 . Les croix rouges indiquent l'instant où S_{\parallel} aux points $p_i^{\gamma_j}$ prend et conserve une valeur positive

L'analyse des LCSs pr sent es à la figure 5.13 est approfondie à la figure 5.14(a) qui montre

l'évolution de λ calculé sur γ_1 en fonction du temps d'intégration. Lorsque t augmente, un 1^{er} point selle est détecté ($p_1^{\gamma_1}$) suivi d'un deuxième point ($p_2^{\gamma_1}$), situé en amont de $p_1^{\gamma_1}$, puis un troisième point ($p_3^{\gamma_1}$) émerge en amont des deux précédents. Puisque des temps d'intégration substantiels sont nécessaires afin d'extraire ces points, la figure 5.14(b) présente des données similaires à la figure 5.14(a), mais en indiquant la valeur instantanée du taux d'étirement tangentiel au lieu de la valeur temporelle cumulative. Contrairement à $p_1^{\gamma_1}$ qui comporte un taux d'étirement positif tout au long de sa trajectoire, pour le point $p_2^{\gamma_1}$, S_{\parallel} change de signe deux fois entre le temps initial et celui de sa détection. Cette période d'oscillation est encore plus longue pour $p_3^{\gamma_1}$, pour lequel S_{\parallel} subit plusieurs changements de signe. Ceci indique que λ ne suit pas une variation temporelle monotone et cette caractéristique explique pourquoi l'utilisation de temps d'intégration importants est nécessaire afin de les détecter.

Les figures 5.14(c,d) présentent les mêmes résultats que ceux des figures 5.14(a,b), mais pour la deuxième LCS γ_2 (voir Fig. 5.13b). Les mêmes tendances sont observées et on identifie quatre points selles sur la ligne matérielle ($p_1^{\gamma_2}$, $p_2^{\gamma_2}$, $p_3^{\gamma_2}$ et $p_4^{\gamma_2}$). Tout comme pour γ_1 , le premier point est caractérisé par un taux d'étirement positif tout au long de l'intégration tandis que les autres subissent plusieurs changements de signe. Une caractéristique intéressante de ces points est que l'hyperbolicité perdure sur de longues périodes, même s'ils sont éjectés de la paroi. En tant qu'exemple supplémentaire, λ sur γ_3 , une LCS plus éloignée de la paroi que les deux autres (voir Fig. 5.13b), a été calculé de la même façon. Les résultats présentés aux figures 5.14(e,f) révèlent de même que les points selles conservent leurs caractéristiques lorsqu'ils sont advectés avec les tourbillons à l'intérieur de l'écoulement (à l'extérieur de la région de proche paroi).

Une vue d'ensemble du mécanisme de décollement est présentée à la figure 5.15. L'advection des LCSs γ_1 et γ_2 est présentée à différents instants accompagnés des points caractéristiques extraits à la figure 5.14. La figure 5.15(a) correspond au temps initial de la figure 5.13. À la figure 5.15(b), on remarque l'étirement de γ_2 autour des points $p_1^{\gamma_2}$, $p_2^{\gamma_2}$ et $p_3^{\gamma_2}$. C'est toujours le cas entre les instants des figures 5.15(b) et (c) sauf pour le point $p_3^{\gamma_2}$ où l'on note le rapprochement des points voisins. Ce phénomène s'explique par l'inversion du signe du taux d'étirement tangentiel, ce qui est indiqué plus précisément à la figure 5.14(d). Entre les figures 5.15(c) et (d), les points voisins de $p_1^{\gamma_2}$ continuent de s'en éloigner, ce qui confirme que S_{\parallel} est toujours positif à la figure 5.14(d), mais le point $p_2^{\gamma_2}$ pour sa part a connu une inversion de signe. La figure 5.15(d) correspond à l'instant pour lequel le taux d'étirement au point $p_2^{\gamma_2}$ devient positif et conserve ce signe, indiqué par une croix rouge à la figure 5.14(d). C'est cette condition caractéristique que l'on utilise afin de définir un point de décollement. Pour des instants subséquents (Fig. 5.15e,g), on note en effet que le point de décollement est éjecté de la paroi et advecté avec les tourbillons, visualisés par l'enroulement de la ligne matérielle γ_2 .

Les points caractéristiques $p_1^{\gamma_1}$ à $p_3^{\gamma_1}$ extraits sur γ_1 sont aussi suivis en temps à la figure 5.15. Bien que S_{\parallel} soit positif pour le point en aval ($p_1^{\gamma_1}$) durant toute la séquence présentée, le taux d'étirement tangentiel du deuxième point $p_2^{\gamma_1}$ subit de nombreux changements de signes avant de conserver une valeur positive à partir de $t = 29.65$ s (Fig. 5.15*f*, et aussi à la Fig. 5.14*b*), ce qui correspond au temps où le décollement est défini. Il est ensuite possible de vérifier que cette position est très près de celle de $p_2^{\gamma_2}$ à la figure 5.15(*d*), *c.-à-d.* de la position du décollement détecté sur la deuxième LCS γ_2 . Un bref instant après l'élévation de $p_2^{\gamma_1}$ de la paroi, à la figure 5.15(*f*), on observe celui de $p_3^{\gamma_2}$ à la figure 5.15(*g*), encore une fois à une position similaire. Finalement, la figure 5.15(*h*) présente les données à approximativement une période de détachement tourbillonnaire après l'instant présenté à la figure 5.15(*g*). On remarque alors que les deux points selles les plus en amont sur chacune des LCSs sont éjectés de la paroi au même instant puisqu'ils sont près l'un de l'autre (en réalité, il y a un délai, mais trop faible pour présenter les deux décollements sur la même figure). Encore une fois, les positions de $p_3^{\gamma_1}$ et $p_4^{\gamma_2}$ avant d'être éjectés de la paroi, sont proches de celle de $p_3^{\gamma_2}$ à la figure 5.15(*g*).

Ces résultats montrent que le phénomène de décollement de la couche limite qui se développe à la paroi se produit aux points selles situés sur des LCSs se déplaçant au-dessus de celle-ci. La variation du taux d'étirement de ces points d'une valeur positive à négative (et l'inverse) est directement associée au décollement des tourbillons secondaires, ce qui confirme le scénario proposé par Didden et Ho (1985) afin de décrire le décollement instationnaire à la paroi. Une conséquence directe de ce processus est qu'une région existe près de la paroi où le fluide n'est pas entraîné à l'intérieur de l'écoulement, mais qui au contraire peut être dirigé vers la paroi, du moins pour un bref instant. Ceci reflète les résultats expérimentaux de El Hassan *et al.* (2012) où des corrélations croisées entre le cisaillement pariétal, mesuré à l'aide de la méthode polarographique, et la vorticité, calculée des champs de vitesse mesurés par vélocimétrie par images de particules, étaient caractérisées par un changement de comportement entre l'écoulement principal et une couche de fluide très fine dans la région pariétale.

Nous allons maintenant juger si les méthodes développées ici sont applicables à des champs de vitesse mesurés plus représentatifs de la réalité.

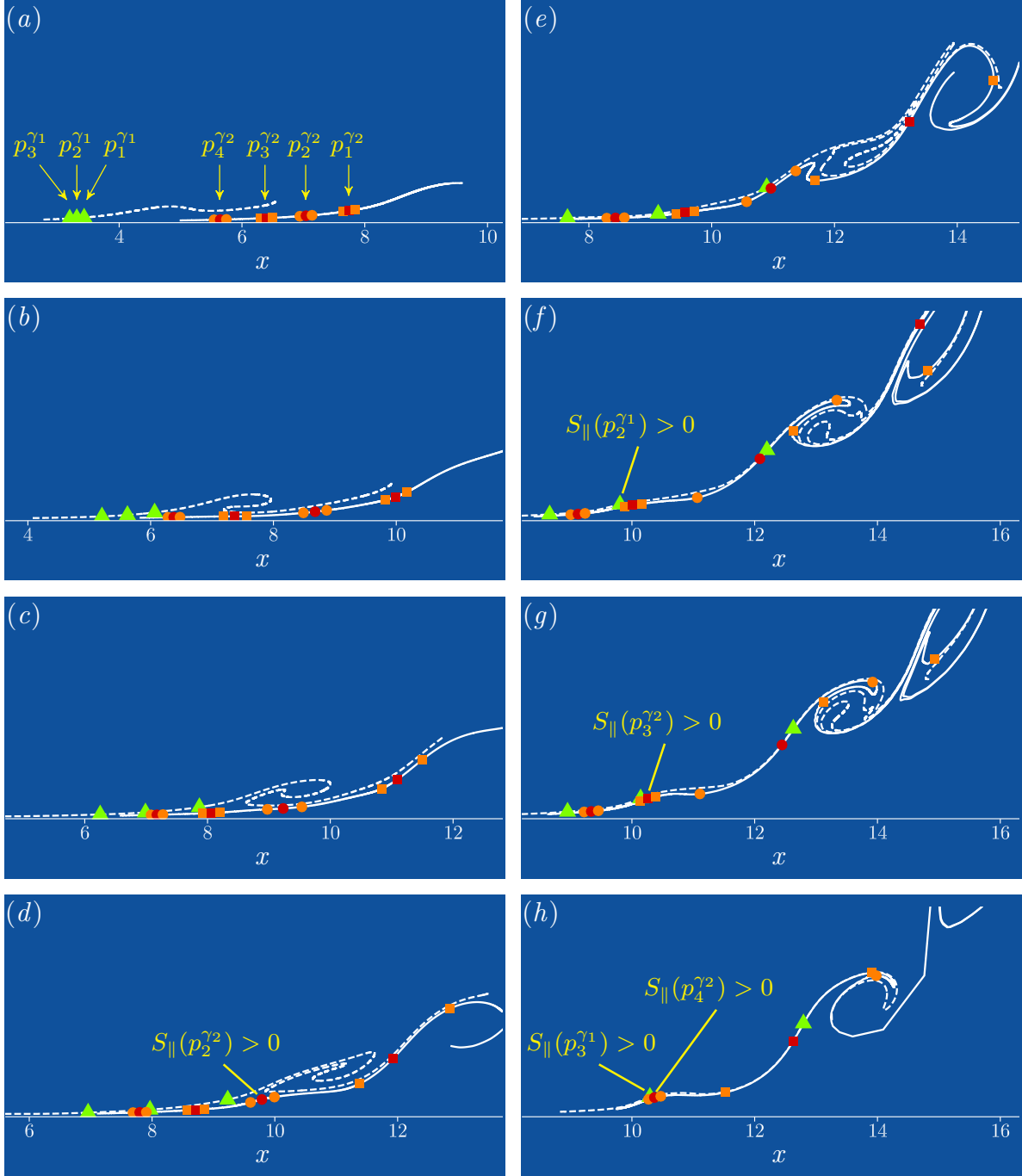


Figure 5.15 Advection en temps des LCSs γ_1 (ligne pointillée) et γ_2 (ligne pleine) détectées à la figure 5.13. Les points caractéristiques sont simultanément advectés et présentés à $t = 10.05$ s (a), $t = 14.95$ s (b), $t = 18.25$ s (c), $t = 21.05$ s (d), $t = 25.45$ s (e), $t = 29.65$ s (f), $t = 30.95$ s (g) et $t = 40.65$ s (h). Pour tous les instants, les trois points de γ_1 ($p_1^{\gamma_1}$ à $p_3^{\gamma_1}$) et les quatre points de γ_2 ($p_1^{\gamma_2}$ à $p_4^{\gamma_2}$) sont respectivement en vert et en rouge. Les symboles orange sont des points près des points caractéristiques de γ_2 qui permettent de visualiser localement l'étirement ou la compression de la ligne matérielle. Les instants où la valeur de $S_{||}$ devient positive correspondent aux croix rouges de la figure 5.14

CHAPITRE 6 RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

La dynamique des fluides expérimentale est pertinente puisqu'on peut mesurer un cas spécifique directement et naturellement sans modèle ni approximation, et ensuite analyser les différents phénomènes. Cependant, la construction et la mise en service d'un montage demandent des heures et des heures de travail... Les modifications apportées au montage initial, présentées au chapitre 3, ont initialement permis d'améliorer la qualité des résultats expérimentaux. Les deux sections suivantes présenteront l'analyse du décollement instationnaire d'un jet libre et d'un anneau tourbillonnaire impactant une plaque plane et permettront de faire le lien avec les résultats numériques du chapitre précédent.

6.1 Écoulement du jet impactant

Le décollement produit par l'impact d'un tourbillon formé dans la couche de mélange d'un jet n'est pas un phénomène facilement reproductible. L'application de la moyenne de phase ne permet donc pas d'observer de décollement pour l'écoulement d'un jet impactant (voir Chap. 3). L'analyse a donc été effectuée directement sur des champs de vitesse instantanés.

Une séquence de champs où le tourbillon est éjecté de la paroi a été sélectionnée et est présentée à la figure 6.1, le comportement étant similaire à ce qui a été présenté numériquement au chapitre 5. Le haut de la figure est situé à $2D$ sous le jet libre (se déplaçant de gauche à droite) de manière à centrer la zone de mesure sur la zone du décollement. De plus, la résolution de la caméra (Phantom v310, avec une résolution de $1280 \text{ px} \times 800 \text{ px}$) est diminuée en x afin d'abaisser la taille des images et de ne mesurer que la zone d'intérêt. Les paramètres principaux de l'écoulement sont présentés au tableau 6.1 et notons que la buse allongée, présentée à la figure 3.23, est utilisée.

Tableau 6.1 Paramètres de l'écoulement du jet impacté

Paramètres	Valeurs	Unités
H/D	5	-
Débit	0.6	L
Re	1268	-
Freq. acquisition	200	Hz
Δt (PIV)	2200	μs
Particules	Argent	-
Objectif	155	mm
Champ vision	(416-863, 0-799)	px

L'utilisation d'un objectif de 155 mm permet de bien observer les phénomènes à la paroi qui sont de tailles plus faibles lorsqu'aucune pulsation n'est imposée. Les valeurs maximales du champ de l'exposant de Lyapunov (FTLE, en blanc) permettent d'identifier plusieurs structures près de la paroi, en particulier le tourbillon indiqué par une flèche blanche. Ce tourbillon est en fait un anneau formé initialement par une instabilité du jet et dont la trajectoire a été modifiée en impactant sur la paroi verticale. Ce tourbillon se convecte vers le bas à la vitesse de l'écoulement moyen de paroi. À la troisième sous figure, le tourbillon s'éjecte de la paroi, et est expulsé par la suite dans l'écoulement principal.

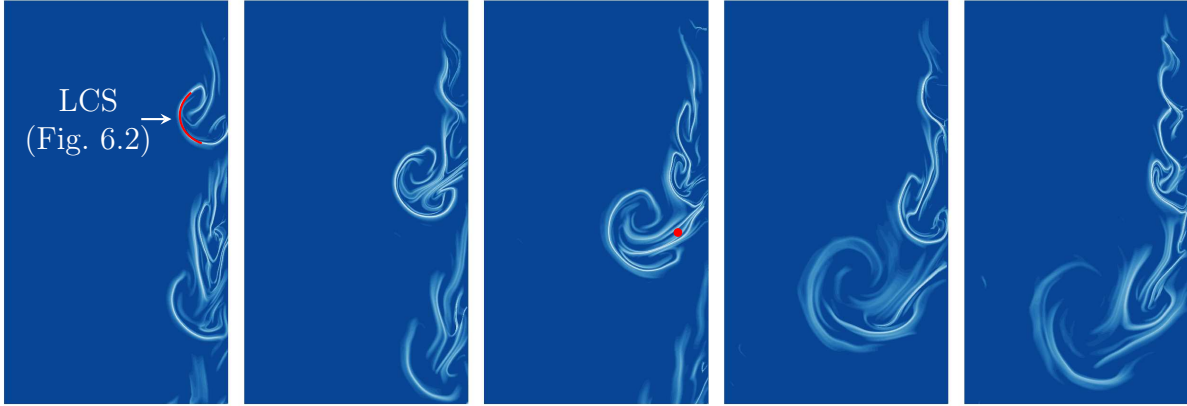


Figure 6.1 Décollement d'un tourbillon créé à la paroi d'un jet impactant. Les contours du FTLE sont présentés afin de visualiser les structures de l'écoulement, le blanc représente les valeurs les plus élevées et le bleu les valeurs les plus faibles. Les figures sont toutes espacées de $\Delta t = 0.175$ s et le temps augmente de gauche à droite. Il est possible de suivre l'évolution de la LCS, identifiée en rouge et analysée en détail à la figure 6.2, de sa création à sa dissipation en passant par l'étape du décollement. La position du point critique est identifiée par le cercle rouge à la troisième figure

Quelques LCSs peuvent être extraites de cet écoulement. La LCS identifiée en rouge à la gauche de la figure 6.1 est suivie en temps et analysée en détail à la figure 6.2. La longueur de celle-ci est limitée, ce qui peut s'expliquer par la sensibilité de la méthode au bruit beaucoup plus présent dans les données instantanées de PIV. Il est important de noter qu'une ligne matérielle au temps t_0 reste une ligne matérielle lors de son advection. De plus, en présence d'un décollement, les lignes matérielles sont attirées et convergent naturellement vers la LCS hyperbolique. Il est donc possible d'observer un phénomène près de la paroi en sélectionnant une LCS initialement éloignée pourvu qu'elle se convecte vers la zone d'intérêt. Ce passage de la ligne matérielle dans la zone de décollement permettra l'identification du point de décollement où l'étirement est maximal.

La LCS est initialement située du côté gauche du tourbillon, présenté à la figure 6.2(a_1) (et Fig. 6.1). Des cercles noirs sont positionnés sur la LCS autour du point critique identifié par un cercle rouge et positionné au minimum de l'exposant λ (Eq. 4.10). Un des caractères particuliers observés près du décollement est la formation d'un pic en amont du point selle (point critique). Ce phénomène, observé lors des analyses analytiques et numériques, se produit en (a_2) lorsque la LCS s'approche de la paroi après avoir été entraînée autour du tourbillon. À l'aide des points supplémentaires insérés avant et après le point critique, il est possible d'observer la répulsion autour du point critique dans la zone où le décollement est observé (Fig 6.2 a_3), soit l'endroit où le tourbillon est éjecté de la paroi. Par la suite, la LCS est entraînée dans un mouvement rotatif dans l'écoulement externe (a_4)-(a_5)-(a_6) et le point selle continue de repousser les particules de cette région, ce qui peut être observé par l'éloignement des cercles noirs.

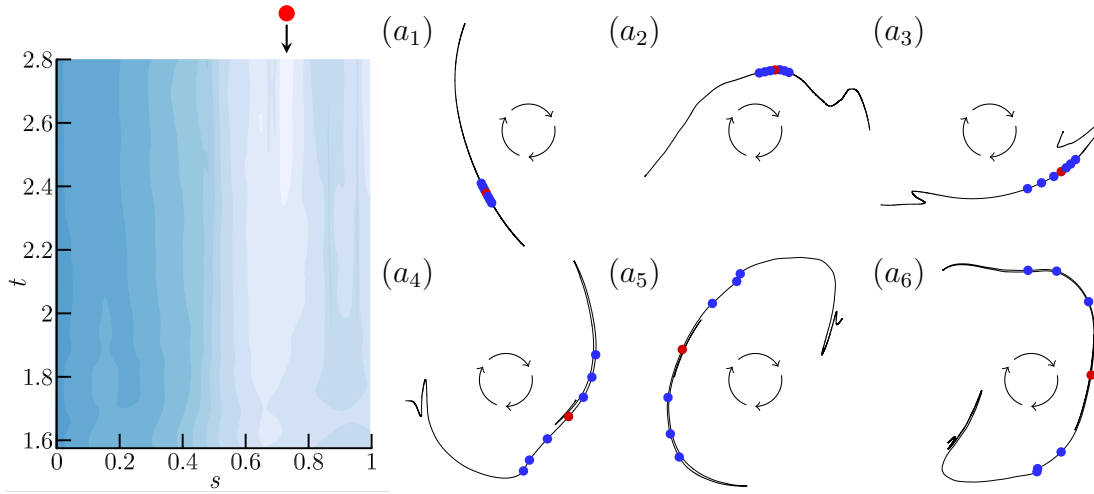


Figure 6.2 Évolution d'une LCS près de la paroi d'un jet impactant. La courbe est convectée du premier instant (a_1) au dernier instant (a_6) avec $t_1 = 1.575$ s, $t_2 = 1.7$ s, $t_3 = 1.84$ s, $t_4 = 2.2$ s, $t_5 = 2.4$ s et $t_6 = 2.65$ s. Le tourbillon près de la LCS est schématiquement représenté afin de situer la courbe dans l'espace. Le point critique (maximisant la valeur de λ , voir Eq. 4.10) est indiqué par un cercle rouge sur la gauche (les couleurs vont du bleu vers le blanc) et ainsi que sur la droite où il est accompagné de cercles bleus positionnés de part et d'autre afin de visualiser l'étirement dans cette région

Le décollement ne s'effectue cependant pas de façon périodique, même en utilisant un mécanisme de pulsation externe ou en jouant sur le débit et la variation de la distance entre la buse et la paroi. La génération d'un anneau tourbillonnaire unique, présentée à la section suivante, a permis de remédier à cette situation.

6.2 Dynamique d'un anneau tourbillonnaire

Lorsqu'un jet est expulsé dans un milieu environnant, il entraîne du fluide dans son mouvement. Puisque les jets sont utilisés dans un milieu industriel pour mélanger ou augmenter la transfert thermique, de nombreuses études ont caractérisé le niveau d'entraînement d'un jet en fonction de la géométrie de la buse. Lorsque le débit du jet est augmenté et diminué de façon brusque, un anneau tourbillonnaire se crée et se translate dans le fluide du milieu environnement à une vitesse de convection U_c proportionnelle à la vitesse sur l'axe du jet (voir schématiquement à la Fig 6.3). Cet écoulement simple a été sélectionné pour plusieurs raisons :

- abondance d'études dans la littérature ;
- génération de l'écoulement simple avec un système de pulsation ;
- reproductibilité des résultats ;
- génération d'un décollement du tourbillon à la paroi sous certaines conditions.

Toutes ces caractéristiques font de cet écoulement un cas parfait pour l'étude du décollement. La stabilité et la reproductibilité de l'écoulement permettent la création d'une moyenne de phase basée sur l'impulsion de plusieurs tourbillons et ainsi de diminuer le bruit introduit par les instruments de mesure. De plus, le décollement présent dans cet écoulement est très similaire au cas d'un simple jet à vitesse constante impactant sur une plaque.

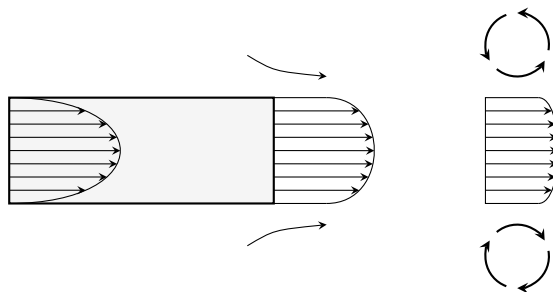


Figure 6.3 Schématisation bidimensionnelle de la formation d'un anneau tourbillonnaire à la sortie d'une canalisation dans un milieu environnant de vitesse nulle

Plusieurs articles de la littérature (Tab. 6.2) décrivent l'impact d'un anneau tourbillonnaire sur une paroi plane. Initialement, les études se sont focalisées principalement sur le développement d'équations numériques de la trajectoire d'un anneau tourbillonnaire impactant sur une paroi, validées par des mesures (Walker *et al.*, 1987). Les articles récents se concentrent sur des analyses numériques et visent à caractériser par exemple l'influence de l'angle d'incidence de l'anneau tourbillonnaire sur l'écoulement (Cheng *et al.*, 2010).

Tout comme pour l'écoulement d'un jet impactant, présenté à la section numérique et expéri-

mentale, le décollement du tourbillon primaire de la paroi entraîne la création d'un tourbillon secondaire. Naturellement, ce comportement est fonction du nombre de Reynolds et de la puissance du tourbillon initial. Pour des valeurs de $Re < 250$, aucun tourbillon secondaire n'est créé (Walker *et al.*, 1987). Cependant, un rebond du tourbillon principal est observé lorsqu'il impacte sur la plaque plane. Pour des Re plus élevés ($Re \approx 500$), un décollement se produit à l'impact, ce qui entraîne la création d'un tourbillon secondaire. Lorsque le nombre de Reynolds augmente encore, la circulation du tourbillon secondaire par rapport au tourbillon primaire augmente considérablement. Le champ induit par le tourbillon secondaire parvient même à renverser le sens de la direction du tourbillon primaire lorsque $Re > 1300$. Les différentes études fixent la distance entre la buse et la plaque dans l'intervalle $H/D = [2.75, 6.8]$. La distance doit être assez grande pour permettre la création de tourbillons dans la couche de mélange du jet sans pour autant laisser le temps à ceux-ci d'être dissipés dans le milieu environnant.

Tableau 6.2 Résumé des différentes configurations d'anneau tourbillonnaire présentées dans la littérature

Articles	E/N	Re	D	H/D
Walker <i>et al.</i> (1987)	Exp.	105-3000	0.95-3.81 cm	2.85-6.8
Orlandi et Verzicco (1993)	Num.	564-3000	-	1
Chu <i>et al.</i> (1995)	Comb.	500-2000	32 mm	4
Fabris <i>et al.</i> (1996)	Comb.	1000	2.54 cm	4
Naguib et Koochesfahani (2004)	Exp.	1860	3.64 cm	2.75

Les données présentées à la figure 6.5 ont été obtenues par la moyenne de phase de 77 impacts d'un anneau tourbillonnaire sur une plaque positionnée perpendiculairement à l'axe principal du jet à 4 diamètres de la buse. Les champs de vitesse sont mesurés pendant 3.5 s à une fréquence de 200 Hz suite à la création d'un anneau tourbillonnaire sous l'effet d'un mouvement rapide d'une demi-période d'un piston à une vitesse de 0.5 Hz. Les principaux paramètres de l'écoulement sont résumés au tableau 6.3.

Le piston n'effectue qu'une rotation partielle afin d'éviter les perturbations sur l'anneau tourbillonnaire lors de la phase d'aspiration du piston. Entre deux séries de mesure, le piston est repositionné à sa position initiale en exécutant simplement le même programme (sans enregistrer les images de la caméra).

La figure 6.4 présente l'erreur sur la convergence des moyennes de phase de la vitesse u en fonction du nombre de séries utilisées. Les différentes courbes présentées à la figure 6.4(b) correspondent aux positions indiquées sur la figure 6.4(a). L'erreur est calculée lorsque la vitesse est importante, soit lorsque le tourbillon est situé près de chacun des points. Le

Tableau 6.3 Paramètres de l'écoulement de l'anneau tourbillonnaire

Paramètres	Valeurs	Unités
H/D	4	-
D	3.175	cm
Freq. piston	0.5	Hz
Freq. acquisition	200	Hz
Δt (PIV)	2450	μs
Particules	Plastique	-
Objectif	105	mm
Champ de vision	(0-1200, 0-799)	px
Champ de vision	(36.47, 47.06)	mm

point noir est positionné dans le passage du tourbillon ($t = 0.4 s$) et les trois autres points sont positionnés près de la paroi. Le point rouge est situé près de la zone d'impact ($t = 0.75 s$), le point vert près de la zone de décollement ($t = 0.85 s$) et le point bleu dans la zone de création du décollement secondaire ($t = 1.85 s$). Pour chacune de ces positions, l'erreur diminue rapidement en fonction du nombre de séries et oscille autour de $[10^{-2}, 10^{-4}]$. Cette valeur est faible comparativement à la valeur moyenne du déplacement des particules qui varie entre $[4 px, 7 px]$ en fonction de la position et correspond à une erreur de $\sim 0.2\%$. Il est cependant important de noter que dans les zones où la vitesse est faible (ou nulle), l'erreur absolue est du même ordre de grandeur, ce qui correspond à une erreur de $\sim 5\%$ pour un déplacement moyen de $0.5 px$ (malgré l'utilisation de 77 séries d'acquisition!).

Les deux premiers points sont situés respectivement dans la trajectoire directe et indirecte de l'anneau tourbillonnaire. Afin d'expliquer les différents comportements de la convergence, il est important de noter que le Δt entre les doublets d'images en PIV est fixe et est sélectionné afin d'obtenir un mouvement des particules assez grand à condition de ne pas sortir des fenêtres d'interrogation (voir la description de la méthode PIV au Chap. 3). Il est donc normal d'observer des erreurs relatives plus importantes dans les zones à faible vitesse, par exemple près de la paroi. De plus, lorsque le tourbillon impacte, plusieurs éléments perturbent l'écoulement ce qui augmente les disparités entre les séries de mesures subséquentes. C'est ce qui permet d'expliquer les oscillations supérieures de l'erreur au point bleu situé dans la zone du deuxième décollement.

Malgré ces oscillations, le champ de vitesse résultant est de qualité supérieure aux champs de vitesse instantanés et les vecteurs aberrants sont complètement éliminés par la moyenne de phase, comme la série de champs de vitesse présentée à la figure 6.5 le montre. L'écoulement créé de l'impact d'un anneau tourbillonnaire est décrit par quelques étapes caractéristiques, décrites dans Walker *et al.* (1987) et observables à la figure 6.5 :

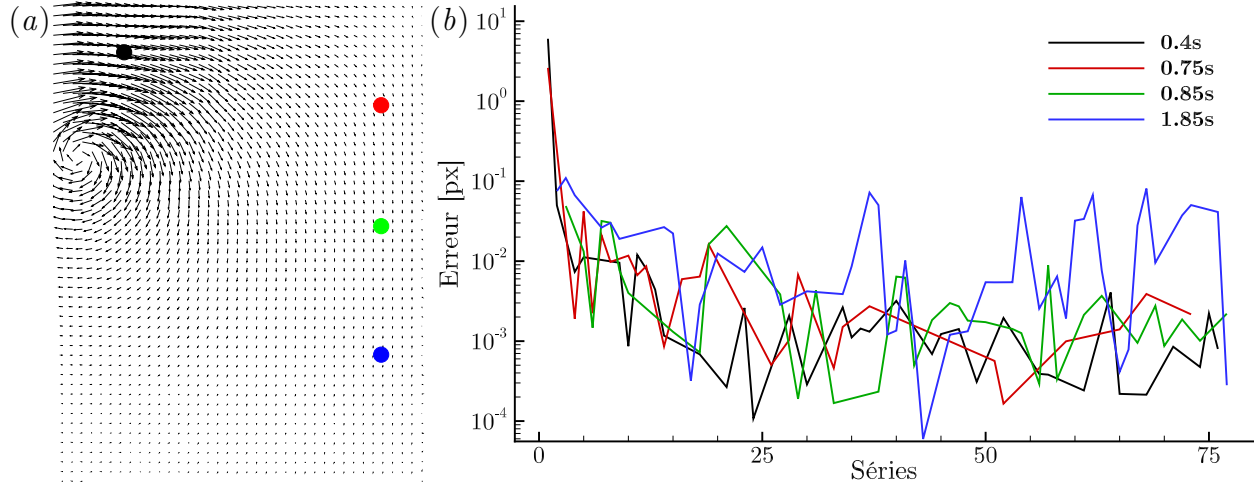


Figure 6.4 Erreur en pixels sur la vitesse moyenne en fonction du nombre de séries utilisées pour la moyenne de phase. Le champ de vitesse à $t = 0.4$ s est présenté en (a) et la convergence de l'erreur à quatre positions dans le domaine de mesure en (b). L'erreur est évaluée à l'instant t où le tourbillon est près de chacune des positions représentées par des cercles. Le point noir est situé dans le passage du tourbillon, le point rouge est situé dans la zone d'impact et les points vert et bleu sont respectivement positionnés au premier et deuxième décollement à la paroi (à l'extrémité droite de la figure)

1. À l'approche de la paroi du tourbillon primaire, une zone de recirculation apparaît à la paroi et un décollement se produit (trois premiers instants Fig. 6.5) ;
2. Le décollement de la couche limite, lorsque le tourbillon principal est assez puissant, se conclut par la création d'un tourbillon secondaire de sens opposé (3^e instant Fig. 6.5) ;
3. Les deux tourbillons sont alors éjectés de la paroi dans un mouvement de rotation entraînant le tourbillon secondaire en périphérie du tourbillon principal qui reste près de la paroi (4^e instant Fig. 6.5) ;
4. Le tourbillon primaire se rapproche à nouveau de la paroi, entraînant la création d'un deuxième décollement et d'un tourbillon tertiaire (5^e instant Fig. 6.5) ;
5. Le tourbillon tertiaire est ensuite éjecté avant de se dissiper, tout comme les tourbillons primaires et secondaires, dans le milieu environnant (6^e instant Fig. 6.5).

L'utilisation de la méthode décrite au chapitre 4 permet d'identifier l'endroit où les deux décollements se produisent et de visualiser la complexité de l'écoulement près de la paroi. La figure 6.6 présente deux LCSs caractéristiques capturées près du tourbillon principal. Celle située près de la paroi est sélectionnée afin de poursuivre l'analyse puisqu'elle est située près de la zone de décollement et permettra d'identifier les points selles lors de son advection. On

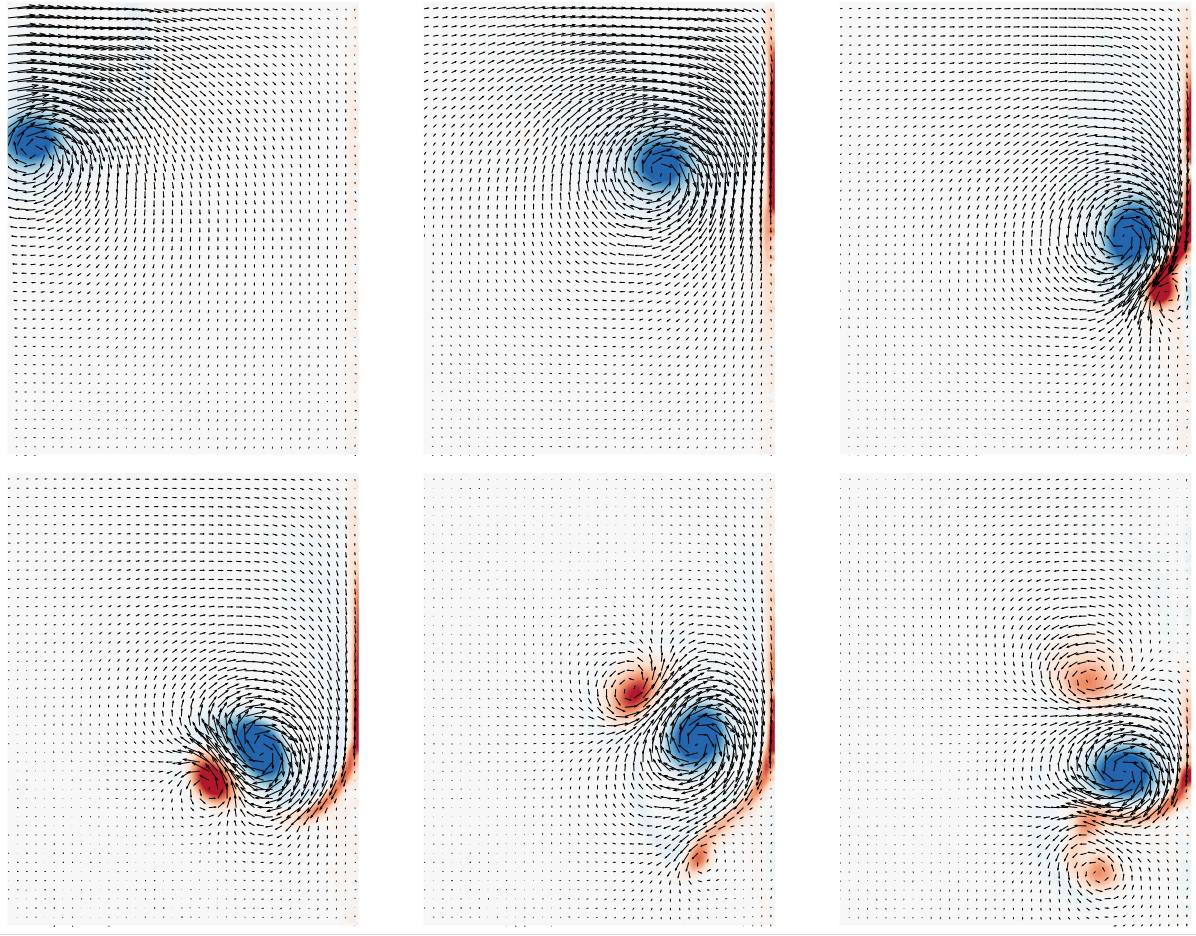


Figure 6.5 Moyenne de phase du champ de vitesse généré par l’anneau tourbillonnaire impactant une paroi (située à la droite de la figure). Les contours de vorticité permettent de visualiser la rotation du tourbillon principal dans le sens horaire et celle du tourbillon secondaire formé lors de l’impact à la paroi dans le sens antihoraire. Les champs de vitesse sont présentés chronologiquement de gauche à droite et du haut vers le bas aux temps $t = 0.3\text{ s}$, $t = 0.7\text{ s}$, $t = 0.9\text{ s}$, $t = 1.1\text{ s}$, $t = 1.3\text{ s}$ et $t = 1.5\text{ s}$

remarque qu’elle n’est pas situ e à un extremum de l’exposant de Lyapunov (les contours sont présentés en ordre croissant du bleu au blanc), mais conserve une grande cohérence lors de son advection comme la figure 6.7 le montre.

La figure 6.7 présente encore une fois sur la gauche les valeurs de λ (Eq. 4.10 du bleu au blanc) et sur la droite l’évolution de la LCS inférieure pr sent e à la figure 6.6. Sur la droite, trois différentes séries sont identifi es respectivement par les lettres (a), (b) et (c) afin d’illustrer le comportement de trois points selles. Ces points selles sont représentés par un cercle, un triangle inversé et un carré rouges et sont tous les trois des maximums locaux de λ . Le

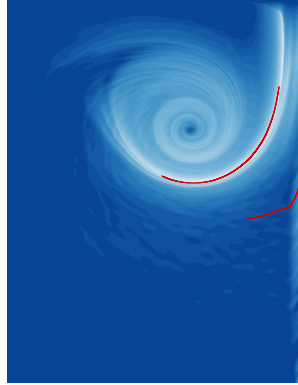


Figure 6.6 Présentation de deux structures lagrangiennes cohérentes près de la paroi à l'impact d'un anneau tourbillonnaire accompagnée des contours du FTLE. La LCS située la plus près de la paroi a été sélectionnée, car elle permet de bien capturer les deux décollements se produisant lors de l'impact (voir l'analyse à la Fig. 6.7)

maximum du carré rouge est plus difficile à identifier sur la figure, car il est situé à la limite de la LCS dans une zone où l'étirement ne se produit que sur un nombre restreint de points voisins.

La série (a) permet d'illustrer le premier décollement produit à l'approche du tourbillon principal de la paroi. Le cercle rouge est positionné au maximum de λ et trois points bleus sont positionnés de part et d'autre sur la LCS. À la figure 6.7(a₁), un pic se forme en amont des particules, un élément caractéristique du décollement. Les particules sont ensuite entraînées, mais on remarque qu'elles s'éloignent constamment du point selle. Aux instants subséquents, les cercles bleus devant le point selle sont entraînés dans les tourbillons tandis que les cercles derrière restent à l'extérieur de ceux-ci.

La série (b) présente un point selle dans la zone centrale qui subit beaucoup d'étirement à partir de ~ 1.1 s. L'évolution des trajectoires de ces nœuds permet d'expliquer le phénomène détecté. En fait, il ne s'agit pas ici d'un décollement, mais plutôt d'une bifurcation des particules lors du 2^e impact du tourbillon sur la paroi. Cependant, il s'agit sans aucun doute d'un point selle, tel que présenté à la figure 6.7(b₂) où les triangles bleus sont repoussés de part et d'autre lors de l'impact. Cette série permet d'illustrer les phénomènes de déformations présents entre le tourbillon principal et secondaire.

La série (c) permet finalement d'illustrer le 2^e décollement. Les carrés sont initialement tous situés à la limite de la LCS, tout près de la paroi. Lors du deuxième décollement et de la création du tourbillon tertiaire, les carrés sont éjectés de la paroi. On remarque encore une fois que les trois derniers carrés restent près de la paroi, à proximité de la limite du tourbillon

primaire, tandis que ceux de l'autre côté se retrouvent entraînés dans l'écoulement.

Ce qui est remarquable ici c'est de constater comment une ligne matérielle de géométrie initiale simple peut prendre une forme complexe avec le temps. Un autre élément important est que les deux décollements ont été détectés sur la même LCS.

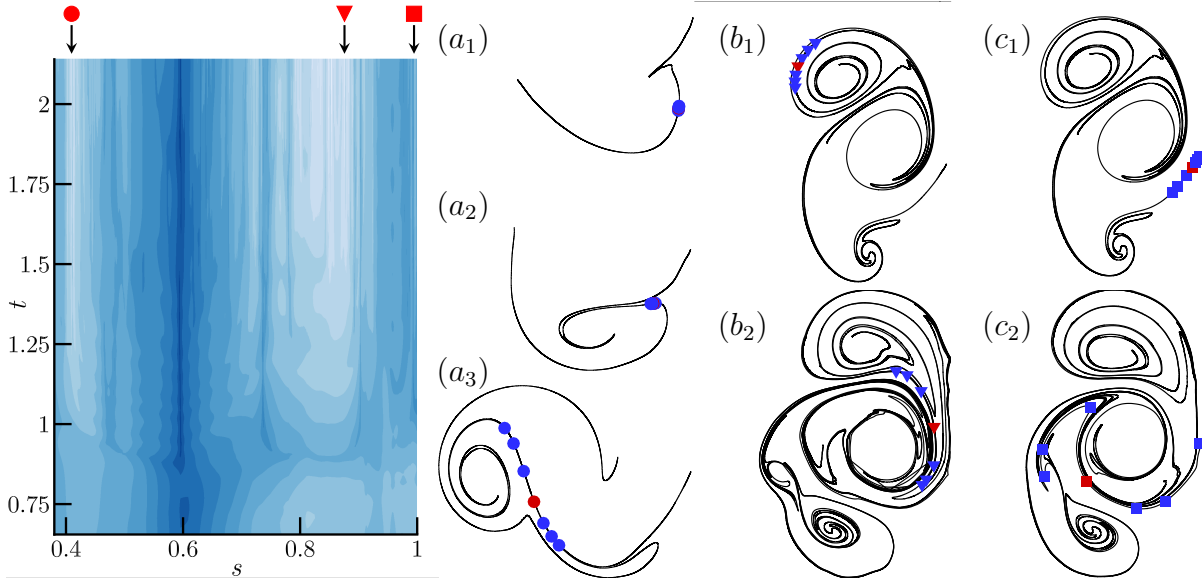


Figure 6.7 Analyse du décollement présentée en étudiant les valeurs de λ en fonction du temps t et de l'abscisse curviligne s sur la LCS (à gauche de l'image). Les valeurs positives (en blanc) indiquent les zones où l'étirement est important dans l'écoulement. Trois points présentant des étirements maximaux dans des régions distinctes sont sélectionnés et identifiés par les formes géométriques rouges (cercle, triangle et carré). La partie de droite présente le comportement autour de ces points critiques par l'ajout de points auxiliaires de part et d'autre. Les trois séries, identifiées par a , b , et c , permettent de visualiser respectivement le décollement initial de l'anneau tourbillonnaire, la déformation au sein du tourbillon principal et finalement le décollement secondaire lors du rebond du tourbillon sur la paroi. Les temps des différentes sous-figures sont respectivement $t_{a_1} = 0.915 \text{ s}$, $t_{a_2} = 0.9975 \text{ s}$, $t_{a_3} = 1.1375 \text{ s}$, $t_{b_1} = 1.4025 \text{ s}$, $t_{b_2} = 1.83 \text{ s}$, $t_{c_1} = 1.4025 \text{ s}$, $t_{c_2} = 1.6675 \text{ s}$

CHAPITRE 7 CONCLUSION

7.1 Synthèse des travaux

Une méthodologie lagrangienne de détection et d'analyse du décollement mobile, présent dans les écoulements tourbillonnaires, a été présentée. Le point de décollement est défini comme un point selle à l'intérieur de l'écoulement, et n'est donc pas attaché à la paroi. Ce point est détecté sur une ligne matérielle (LCS) en observant le comportement d'un exposant (similaire à l'exposant de Lyapunov) qui cumule l'historique du taux d'étirement, car au point de décollement ce taux est maximum. Il est ensuite montré que la position du point et les caractéristiques du profil de décollement (pente, courbure, etc.) peuvent être prédites en les advectant dans l'écoulement.

La méthodologie est ensuite rigoureusement validée à l'aide d'exemples de complexité croissante. Un écoulement analytique dans le régime de Stokes, décrivant l'écoulement en périphérie d'un cylindre en rotation autour de son axe et en translation parallèle à une paroi, est initialement étudié. La position et le type de décollement sont contrôlés par quelques paramètres, ce qui en fait un premier candidat de validation idéal. Lorsque le cylindre est simplement en oscillation, l'écoulement est périodique, le décollement est alors fixe à la paroi et peut être déterminé à l'aide de formules explicites (fonction de valeurs pariétales Haller, 2004). Cependant, lorsque le mouvement du cylindre n'est plus périodique, le décollement ne laisse aucune empreinte à la paroi ce qui rend sa détection impossible à l'aide de quantités pariétales. Par contre, le point de décollement coïncide bien avec un point selle lagrangien identifié sur une LCS située près de la paroi, mais bien à l'intérieur de l'écoulement. La position et l'angle du décollement, définis par la tangente de la LCS au point de décollement, sont prédits à partir de valeurs connues à un temps initial et la méthode est généralisée pour tout mouvement arbitraire du cylindre.

Des écoulements obtenus de la résolution de l'équation de Navier–Stokes par la méthode des éléments finis sont ensuite analysés. L'utilisation de simulations numériques permet d'obtenir des bases de données de vitesse rapidement, complètes et sans erreur, ceci pour des écoulements plus complexes que ceux définis analytiquement. L'écoulement à un nombre de Reynolds de 50 autour d'un cylindre en rotation est initialement sélectionné puisque malgré sa géométrie simple, sous certaines conditions, deux points selles lagrangiens apparaissent de part et d'autre du cylindre. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement pariétal moyenne ne s'annule pas au voisinage d'aucun des points selles, même en se positionnant dans un repère tournant avec le cylindre. Cela indique que la méthode présentée dans Surana et Haller

(2008) (ainsi que dans toutes les autres méthodes existantes) ne peut être appliquée. Des LCSs sont extraites des deux côtés du cylindre et permettent de détecter ces deux points et d'observer leurs comportements. Lorsque la vitesse en amont du cylindre est pulsée, le mouvement elliptique des points de décollement est aussi périodique. Dans cette situation, une des caractéristiques importantes observées est leur cinématique plus lente par rapport à leurs homologues eulériens qui oscillent de manière beaucoup plus prononcée. Lorsque le cylindre est fixe, la formation périodique de tourbillons asymétriques, connue sous le nom des allées de von Kármán, se produit dans le sillage du cylindre. Aux abords de la surface du cylindre en aval de l'écoulement, l'analyse de LCSs permet de déterminer que les particules sont cycliquement éjectées et attirées de la paroi, supposant la présence d'un point selle et d'un décollement mobile. Il est cependant montré que le phénomène se produisant derrière le cylindre est en fait un décollement fixe et le profil de décollement, attaché à la paroi, permet de délimiter les zones de haute et de basse vitesses et ainsi le comportement de particules dans cette région.

L'écoulement d'un jet impactant qui génère une dynamique tourbillonnaire complexe est par la suite étudié. Un profil de vitesse en tangente hyperbolique, comportant un point d'inflexion, est imposé à l'entrée du domaine de calcul afin d'introduire des instabilités et de permettre la génération de tourbillons dans la couche de mélange du jet. Ces tourbillons impactent ensuite sur la paroi et en fonction de certains paramètres (Re et distance entre la buse du jet et la plaque), un décollement mobile apparaît dans l'écoulement si bien que le tourbillon est éjecté. Lors de l'advection d'une ligne matérielle initialement près de la paroi, un point selle est détecté et permet de déterminer la région où le décollement se produit. En outre, sur une même LCS, plusieurs maximums locaux sont détectés à un intervalle de temps constant et correspondent à l'apparition de plusieurs décollements durant l'advection de la ligne matérielle. Il est aussi montré, pour chacun de ces points selles, que la position du décollement se produit sensiblement au même endroit au-dessus de la paroi, et ce pour sept points distincts issus de deux LCSs.

Finalement, la méthodologie est appliquée à l'analyse du décollement se produisant dans des écoulements réels, réalisés dans notre laboratoire de dynamique des fluides. Le montage expérimental permet la génération d'un jet impactant sur une plaque plane dans un bassin de mesure conçu pour accueillir un système de vélocimétrie par image de particules (PIV). Cette technique de mesure, décrite au chapitre 3, permet l'évaluation de deux composantes de la vitesse dans un plan à une cadence d'acquisition suffisamment élevée pour obtenir simultanément une résolution temporelle suffisante des phénomènes temporels. Les expériences permettent de générer des bases de données de vitesse et de mettre à l'épreuve la robustesse de la méthodologie proposée et ainsi illustrer ses avantages. Le premier écoulement mesuré

est celui d'un jet impactant sur une plaque plane, permettant la comparaison avec les résultats issus de données numériques. L'analyse, effectuée sur des champs de vitesse instantanée, permet d'observer le mouvement d'une LCS dans la zone près de la paroi. Avant le décollement, un pic se forme en amont du point selle sur la LCS, ce comportement caractéristique ayant été observé sur plusieurs cas simples (voir Chap. 4). Au décollement, lorsque la LCS est expulsée de la paroi avec le tourbillon principal, des points positionnés de part et d'autre du point selle s'en éloignent et permettent d'observer l'étirement maximal. D'ailleurs, le point selle conserve cette caractéristique lors de son advection dans l'écoulement principal loin de la paroi.

L'advection de lignes matérielles a permis de montrer leurs grandes cohérences spatiales, et ce même au sein d'écoulements tourbillonnaires. Par exemple, lors de l'impact d'un anneau tourbillonnaire sur une paroi plane, généré à l'aide d'un piston induisant une pulsation vive, l'extraction d'une seule LCS permet d'observer deux phénomènes de décollement. La LCS est en fait détectée près de la paroi et les points qui maximisent la valeur de l'étirement sont identifiés. Le premier point permet effectivement de détecter la position du premier décollement se produisant à la suite de l'impact du tourbillon primaire. Ce décollement entraîne la création d'un tourbillon secondaire de sens opposé. Le deuxième point selle sur la LCS ne correspond pas à un décollement, mais est en fait localisé dans une région de grande déformation entre les tourbillons primaire et secondaire. Le troisième point, initialement très près de la paroi, est expulsé beaucoup plus tardivement. Son comportement est initialement stable, mais lors du deuxième impact du tourbillon principal, le point selle est éjecté de la paroi. Ceci coïncide avec le deuxième décollement et la création d'un tourbillon tertiaire encore une fois de sens opposé au tourbillon primaire.

7.2 Limitations et améliorations futures

Cette méthodologie, basée sur plusieurs techniques novatrices, a permis de détecter le décollement se produisant dans les écoulements tourbillonnaires, mais ne permet pas l'élaboration d'une théorie complète et universelle.

En trois dimensions, la méthode peut aussi être appliquée, mais demande la construction d'une surface matérielle. En fait, des lignes matérielles sont extraites sur des plans bidimensionnels, et doivent être combinées afin de former une surface tridimensionnelle, une tâche qui devient rapidement complexe. Il pourrait être envisageable de construire directement ces surfaces à l'aide de nouveaux critères et de l'algorithme présentés par Serra et Haller (2015) et Farazmand et Haller (2016).

L'élaboration d'un nouveau montage expérimental, sa fabrication, sa mise en service et son optimisation, ont entraîné des délais beaucoup plus importants que ceux qui avaient été planifiés. Il a donc été nécessaire d'abandonner quelques études initialement prévues. Par exemple, l'analyse d'écoulements tridimensionnels n'a pas été réalisée. Il serait intéressant d'apporter les modifications nécessaires au montage afin de permettre l'utilisation d'un système de PIV tomographique (trois composantes de la vitesse dans un volume). De plus, la méthode polarographique, présentement à l'étude au laboratoire et donnant accès à la mesure des deux composantes du frottement pariétal instantané, couplée à la PIV permettraient de prédire la position et le profil dans le cas du décollement fixe et de valider que le phénomène est complètement décorrélé des variables de paroi dans le cas du décollement mobile.

RÉFÉRENCES

- Andronov, A. A., Vitt, A. A. et Khaïkin, S. E. (1966), Theory of oscillators, vol. 4, Courier Corporation.
- Bell, J. H. et Mehta, R. D. (1988), Contraction design for small low-speed wind tunnels, Joint Institute for Aeronautics and Acoustics.
- Ben-Gida, H., Gurka, R. et Weihs, D. (2015), Aerodynamics of a freely flying owl from piv measurements in the wake, Bull. Am. Phys. Soc., vol. 60.
- Bin, J., LUO, X.-w., PENG, X.-x. et WU, Y.-l. (2013), Three-dimensional large eddy simulation and vorticity analysis of unsteady cavitating flow around a twisted hydrofoil, J. Hydrodyn. Ser. B, vol. 25, no. 4, p. 510–519.
- Cassel, K. W. et Conlisk, A. T. (2014), Unsteady separation in vortex-induced boundary layers, Phil. Trans. R. Soc. A, vol. 372, no. 2020.
- Cheng, M., Lou, J. et Luo, L.-S. (2010), Numerical study of a vortex ring impacting a flat wall, J. Fluid Mech., vol. 660, p. 430–455.
- Childress, S., Ierley, G., Spiegel, E. et Young, W. (1989), Blow-up of unsteady two-dimensional euler and navier-stokes solutions having stagnation-point form, J. Fluid Mech., vol. 203, p. 1–22.
- Chu, C.-C., Wang, C.-T. et Chang, C.-C. (1995), A vortex ring impinging on a solid plane surface–vortex structure and surface force, Phys. Fluids, vol. 7, no. 6, p. 1391–1401.
- Ciarlet, P. G. (2002), The finite element method for elliptic problems, vol. 40, Siam.
- Cowley, S. J. (2001), Laminar boundary-layer theory : a 20th Century Paradox ?, Springer, 389–412 p.
- Cowley, S. J., Van Dommelen, L. L. et Lam, S. T. (1990), On the use of lagrangian variables in descriptions of unsteady boundary-layer separation, Phil. Trans. R. Soc. A, vol. 333, p. 343–78.
- Crow, S. C. et Champagne, F. (1971), Orderly structure in jet turbulence, J. Fluid Mech., vol. 48, no. 3, p. 547–591.
- Dahlquist, G. (1958), Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations, Almqvist & Wiksell.
- Dahlquist, G. G. (1963), A special stability problem for linear multistep methods, BIT Numer. Math., vol. 3, no. 1, p. 27–43.

- Dairay, T., Fortuné, V., Lamballais, E. et Brizzi, L.-E. (2015), Direct numerical simulation of a turbulent jet impinging on a heated wall, J. Fluid Mech., vol. 764, p. 362–394.
- Didden, N. et Ho, C.-M. (1985), Unsteady separation in a boundary layer produced by an impinging jet, J. Fluid Mech., vol. 160, p. 235–256.
- Doligalski, T. L., Smith, C. R. et Walker, J. D. A. (1994), Vortex interactions with walls, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 26, p. 573–616.
- Dong, S., Karniadakis, G. E. et Chrysosostomidis, C. (2014), A robust and accurate outflow boundary condition for incompressible flow simulations on severely-truncated unbounded domains, J. Comput. Phys., vol. 261, p. 83–105.
- Ece, M., Walker, J. et Doligalski, T. (1984), The boundary layer on an impulsively started rotating and translating cylinder, Phys. Fluids, vol. 27, no. 5, p. 1077–1089.
- El Hassan, M., Assoum, H. H., Sobolik, V., Vétel, J., Abed-Meraim, K., Garon, A. et Sakout, A. (2012), Experimental investigation of the wall shear stress and the vortex dynamics in a circular impinging jet, Exp. Fluids, vol. 52, no. 6, p. 1475–1489.
- Fabris, D., Liepmann, D. et Marcus, D. (1996), Quantitative experimental and numerical investigation of a vortex ring impinging on a wall, Phys. Fluids, vol. 8, no. 10, p. 2640–2649.
- Farazmand, M. et Haller, G. (2012), Computing lagrangian coherent structures from their variational theory, Chaos, vol. 22, p. 013 128.
- Farazmand, M. et Haller, G. (2016), Polar rotation angle identifies elliptic islands in unsteady dynamical systems, Physica D, vol. 315, p. 1–12.
- Gersten, K. et Herwig, H. (1992), Stromungsmechanik, Vieweg Wiesbaden.
- Geuzaine, C. et Remacle, J.-F. (2008), Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, Int. J. Numer. Meth. Eng.
- Ghosh, S., Leonard, A. et Wiggins, S. (1998), Diffusion of a passive scalar from a no-slip boundary into a two-dimensional chaotic advection field, J. Fluid Mech., vol. 372, p. 119–163.
- GmbH, L. (2014), Davis 8.2 Software, Lavision GmbH, Anna-Vandenhoeck-Ring 19, D-37081 Göttingen.
- Goldstein, S. (1948), On laminar boundary-layer flow near a position of separation, Q. J. Mech. Appl. Math., vol. 1, no. 1, p. 43–69.
- Greenewalt, C. H. (1975), The flight of birds : the significant dimensions, their departure from the requirements for dimensional similarity, and the effect on flight aerodynamics of that departure, Trans. Amer. Philos. Soc., vol. 65, no. 4, p. 1–67.

- Gutmark, E. et Ho, C.-M. (1983), Preferred modes and the spreading rates of jets, Phys. Fluids, vol. 26, no. 10, p. 2932–2938.
- Hackborn, W. W., Ulucakli, M. E. et Yuster, T. (1997), A theoretical and experimental study of hyperbolic and degenerate mixing regions in a chaotic stokes flow, J. Fluid Mech., vol. 346, p. 23–48.
- Haller, G. (2001), Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows, Physica D, vol. 149, p. 248–277.
- Haller, G. (2002), Lagrangian coherent structures from approximate velocity data, Phys. Fluids, vol. 14, p. 1851–1861.
- Haller, G. (2004), Exact theory of unsteady separation for two-dimensional flows, J. Fluid Mech., vol. 512, p. 257–311.
- Haller, G. (2011), A variational theory of hyperbolic lagrangian coherent structures, Physica D, vol. 240, no. 7, p. 574–598.
- Haller, G. et Beron-Vera, F. J. (2012), Geodesic theory of transport barriers in two-dimensional flows, Physica D, vol. 241, p. 1680–702.
- Haller, G. et Iacono, R. (2003), Stretching, alignment, and shear in slowly varying velocity fields, Phys. Rev. E, vol. 68, p. 056 304.
- Hay, A., Etienne, S., Pelletier, D. et Garon, A. (2015), hp-adaptive time integration based on the bdf for viscous flows, J. Comput. Phys., vol. 291, p. 151–176.
- Hubel, T. Y. et Tropea, C. (2010), The importance of leading edge vortices under simplified flapping flight conditions at the size scale of birds, J. Exp. Biol., vol. 213, no. 11, p. 1930–1939.
- Jaworski, J. W. et Peake, N. (2013), Aerodynamic noise from a poroelastic edge with implications for the silent flight of owls, J. Fluid Mech., vol. 723, p. 456–479.
- Kilic, M. S., Haller, G. et Neishtadt, A. (2005), Unsteady fluid flow separation by the method of averaging, Phys. Fluids, vol. 17, p. 67–104.
- Klonowska-Prosnak, M. E. et Prosnak, W. J. (2001), An exact solution to the problem of creeping flow around circular cylinder rotating in presence of translating plane boundary, Acta Mech., vol. 146, p. 115–126.
- Koromilas, C. A. et Telionis, D. P. (1980), Unsteady laminar separation : an experimental study, J. Fluid Mech., vol. 97, p. 347–384.
- Landau, L. D. et Lifshitz, E. M. (1987), Fluid mechanics, vol. 6, Elsevier.
- LaVision. (2012), PIV Workshop, LaVision, LaVision GmbH, Anna-Vandenhoeck-Ring 19, D-37081 Gottingen, produced by lavision gmbh, göttingen édition.

- Lekien, F. et Haller, G. (2008), Unsteady flow separation on slip boundaries, Phys. Fluids, vol. 20, p. 097101.
- Lighthill, M. (1963), Boundary layer theory. In Laminar Boundary Layers, Dover.
- Liu, C. S. et Wan, Y.-H. (1985), A simple exact solution of the prandtl boundary layer equations containing a point of separation, Arch. Rational Mech. Anal., vol. 89, no. 2, p. 177–185.
- Ludwig, G. (1964), An experimental investigation of laminar separation from a moving wall, AIAA J., vol. 644.
- Moore, F. K. (1958), On the separation of unsteady boundary layer, dans Boundary-layer Research, édité par H. Görtler, Springer, p. 296–311.
- Naguib, A. M. et Koochesfahani, M. M. (2004), On wall-pressure sources associated with the unsteady separation in a vortex-ring/wall interaction, Phys. Fluids, vol. 16, no. 7, p. 2613–2622.
- Nie, J. et Armaly, B. (2004), Reverse flow regions in three-dimensional backward-facing step flow, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 47, no. 22, p. 4713–4720.
- Olascoaga, M. J. et Haller, G. (2012), Forecasting sudden changes in environmental pollution patterns, Proc. National Acad. Sci., vol. 109, p. 4738–4743.
- Orlandi, P. et Verzicco, R. (1993), Vortex rings impinging on walls : axisymmetric and three-dimensional simulations, J. Fluid Mech., vol. 256, p. 615–646.
- Perry, A. et Chong, M. (1987), A description of eddying motions and flow patterns using critical-point concepts, Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 19, no. 1, p. 125–155.
- Perry, A. et Fairlie, B. (1975), Critical points in flow patterns, Adv. Geophys., vol. 18, no. 2, p. 299–315.
- Perry, A. E. et Chong, M. S. (1986), A series-expansion study of the navier–stokes equations with applications to three-dimensional separation patterns, J. Fluid Mech., vol. 173, p. 207–223.
- Popiel, C. O. et Trass, O. (1991), Visualization of a free and impinging round jet, Exp. Therm. Fluid Sci., vol. 4, no. 3, p. 253–264.
- Prandtl, L. (1904), Über flüssigkeits bewegung bei sehr kleiner reibung, Verhaldlg III Int. Math. Kong., p. 484–491.
- Raffel, M., Willert, C. E., Wereley, S. T. et Kompenhans, J. (2007), Particle Image Velocimetry : A Practical Guide, seconde édition, Springer Berlin, doi :ISBN-13: 978-3540723073.

- Rani, H. P., Sheu, T. W. H. et Tsai, E. S. F. (2007), Eddy structures in a transitional backward-facing step flow, J. Fluid Mech., vol. 588, p. 43–58.
- Rott, N. (1956), Unsteady viscous flows in the vicinity of a separation point, Q. Appl. Maths., vol. 13, p. 444–451.
- Roux, S. (2011), Contribution expérimentale à l’aérothermique d’un jet en impact forcé acoustiquement, Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- Ruban, A., Araki, D., Yapalparvi, R. et Gajjar, J. (2011), On unsteady boundary-layer separation in supersonic flow. part 1. upstream moving separation point, J. Fluid Mech., vol. 678, p. 124–155.
- Russell, J. M. et Landahl, M. (1984), The evolution of a flat eddy near a wall in an inviscid shear flow, Phys. Fluids, vol. 27, no. 3, p. 557–570.
- Schlichting, H., Kestin, J., Schlichting, H. et Schlichting, H. (1968), Boundary-layer theory, vol. 539, McGraw-Hill New York.
- Schuster, S. (1960), Ordinary differential equations (wilfred kaplan), SIAM Review, vol. 2, no. 1, p. 50–52.
- Sears, W. R. (1956), Some recent developments in airfoil theory, J. Aeronaut. Sci., vol. 23, p. 490–499.
- Sears, W. R. et Telionis, D. P. (1975), Boundary-layer separation in unsteady flow, SIAM J. Appl. Maths, vol. 28, p. 215–235.
- Serra, M. et Haller, G. (2015), Objective eulerian coherent structures, arXiv.
- Shadden, S. C., Lekien, F. et Marsden, J. E. (2005), Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows, Physica D, vol. 212, p. 271–304.
- Shen, S.-F. (1978), Unsteady separation according to the boundary-layer equation, Adv. Appl. Mech., vol. 18, p. 177–220.
- Solin, P., Segeth, K. et Dolezel, I. (2003), Higher-Order Finite Element Methods, CRC Press.
- Stern, M. E. et Paldor, N. (1983), Large-amplitude long waves in a shear flow, Phys. Fluids, vol. 26, no. 4, p. 906–919.
- Stuart, J. (1991), The lagrangian picture of fluid motion and its implication for flow structures, IMA J. Appl. Math., vol. 46, no. 1-2, p. 147–163.
- Surana, A., Grunberg, O. et Haller, G. (2006), Exact theory of three-dimensional flow separation. Part 1. Steady separation, J. Fluid Mech., vol. 564, p. 57–103.
- Surana, A. et Haller, G. (2008), Ghost manifolds in slow-fast systems, with applications to unsteady fluid flow separation, Physica D, vol. 237, no. 10, p. 1507–1529.

- Surana, A., Jacobs, G. B., Grunberg, O. et Haller, G. (2008a), An exact theory of three-dimensional fixed separation in unsteady flows, Phys. Fluids, vol. 20, no. 10, p. 107 101.
- Surana, A., Jacobs, G. B., Grunberg, O. et Haller, G. (2008b), An exact theory of three-dimensional fixed separation in unsteady flows, Phys. Fluids, vol. 20, p. 107 101.
- Surana, A., Jacobs, G. B. et Haller, G. (2007), Extraction of separation and attachment surfaces from three-dimensional steady shear flows, AIAA J., vol. 45, no. 6, p. 1290–1302.
- Tropea, C., Yarin, A. L. et Foss, J. F. (2007), Springer handbook of experimental fluid mechanics, vol. 1, Springer Science & Business Media.
- Tylli, N., Kaiktsis, L. et Ineichen, B. (2002), Sidewall effects in flow over a backward-facing step : Experiments and numerical simulations, Phys. Fluids, vol. 14, no. 11, p. 3835–3845.
- Van Dommelen, L. L. (1990), On the lagrangian description of unsteady boundary-layer separation. part 2. the spinning sphere, J. Fluid Mech., vol. 210, p. 627–645.
- Van Dommelen, L. L. et Cowley, S. J. (1990), On the lagrangian description of unsteady boundary-layer separation. part 1. general theory, J. Fluid Mech., vol. 210, p. 593–626.
- Van Dommelen, L. L. et Shen, S. F. (1980), The spontaneous generation of the singularity in a separating laminar boundary layer, J. Comput. Phys., vol. 38, p. 125–140.
- Van Dyke, M. (1982), An album of fluid motion, Parabolic Press Stanford.
- Vétel, J. (2008), Introduction à la PIV, Polytechnique Montréal.
- Vidal, R. (1959), Research on rotating stall in axial-flow compressors : Part iii–experiments on laminar separation from a moving wall, WADC TR, , no. 59-75.
- Violato, D. et Scarano, F. (2011), Three-dimensional evolution of flow structures in transitional circular and chevron jets, Phys. Fluids, vol. 23, p. 124 104.
- Walker, J., Smith, C., Cerra, A. et Doligalski, T. (1987), The impact of a vortex ring on a wall, J. Fluid Mech., vol. 181, p. 99–140.
- Weldon, M., Peacock, T., Jacobs, G. B., Helu, M. et Haller, G. (2008), Experimental and numerical investigation of the kinematic theory of unsteady separation, J. Fluid Mech., vol. 611, p. 1–11.

ANNEXE A ÉQUATION DE LA COUCHE LIMITE

Le développement des équations de la couche limite en deux dimensions débute par la détermination des échelles caractéristiques spatiales et temporelles de l'écoulement, résumées au tableau A.1.

Tableau A.1 Échelles caractéristiques des variables intervenant dans l'équation de Navier–Stokes d'une couche limite ainsi que les expressions sans dimension (notées dans cette section avec une étoile \star)

Variables	Échelles	Sans dimension
x	L	$x^\star = x/L$
y	δ	$y^\star = y/\delta$
u	U_c	$u^\star = u/U_c$
v	V_c	$v^\star = v/V_c$

On poursuit alors une adimensionnalisation de l'équation de Navier–Stokes à l'aide des variables caractéristiques établies au tableau A.1. À l'aide de l'équation de la continuité,

$$\frac{U_c}{L} \frac{\partial u^\star}{\partial x^\star} + \frac{V_c}{\delta} \frac{\partial v^\star}{\partial y^\star} = 0, \quad (\text{A.1})$$

et puisque les deux termes de l'équation (A.1) sont du même ordre de grandeur, il est possible de déterminer une relation entre les vitesses de référence longitudinale U_c et transversale V_c , soit :

$$V_c \sim \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} U_c \right). \quad (\text{A.2})$$

L'approximation de couche limite consiste alors à former l'hypothèse que le développement longitudinal de l'écoulement est plus faible que son développement transversal, autrement dit $\delta/L \ll 1$, et donc de conclure que la vitesse longitudinale à la paroi est beaucoup plus importante que la vitesse transversale à l'intérieur de la couche limite. Cette relation permet ensuite l'évaluation des termes de l'équation de Navier–Stokes selon la direction x en n'utilisant qu'une seule vitesse de référence (notons que le terme de pression est laissé sous sa forme dimensionnelle et sera traité ci-dessous),

$$\frac{U_c^2}{L} \left(u^\star \frac{\partial u^\star}{\partial x^\star} + v^\star \frac{\partial u^\star}{\partial y^\star} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu U_c}{\delta^2} \left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 u^\star}{\partial x^{\star 2}} + \frac{\partial^2 u^\star}{\partial y^{\star 2}} \right). \quad (\text{A.3})$$

Cela permet de négliger le terme visqueux dans la direction longitudinale. On remarque alors

que pour que les forces visqueuses balancent les forces inertielles, il est nécessaire que :

$$\frac{U_c^2}{L} \sim \frac{\nu U_c}{\delta^2} \quad \text{soit} \quad \frac{\delta}{L} \sim \mathcal{O}(Re^{-1/2}), \quad (\text{A.4})$$

où le nombre de Reynolds est défini par $Re = U_c L / \nu$.

Cette relation établit un ordre de grandeur entre les différentes échelles spatiales (δ , L) et le nombre de Reynolds. On remarque que l'augmentation de Re entraîne une diminution de l'épaisseur de la couche limite, caractérisée par δ . De plus, le gradient de pression en x , responsable du décollement dans le cas des couches limites, doit aussi être de $\mathcal{O}(U_c^2/L)$ afin de balancer les forces du système.

En effectuant les mêmes étapes pour l'équation de Navier–Stokes en y , on obtient :

$$\frac{U_c^2 \delta}{L^2} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{U_c^2 \delta}{L^2} \left(\frac{\delta^2}{L^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} \right). \quad (\text{A.5})$$

Les termes dominants de l'équation en y sont $\mathcal{O}(U_c^2 \delta / L^2)$, ce qui permet de montrer que le gradient de pression $\partial p / \partial y$ est lui aussi au moins du même ordre de grandeur. Puisque $U_c^2 / L \gg U_c^2 \delta / L^2$, on peut considérer que la pression $p = p(x)$. Cela permet d'évaluer le gradient de pression à l'extérieur de la couche limite, soit lorsque $y \gg \delta$, à l'aide de l'équation de Bernoulli :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_c \frac{\partial U_c}{\partial x}, \quad (\text{A.6})$$

ce qui est bien $\mathcal{O}(U_c^2 / L)$. Nous obtenons alors les équations de la couche limite :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (\text{A.8})$$

en omettant maintenant l'astérisque (*) afin de simplifier la notation.

ANNEXE B IDENTIFICATION DE L'ANGLE DU DÉCOLLEMENT

Ici nous déterminons les coefficients de la matrice jacobienne \mathbf{F} permettant d'analyser un point critique.

L'exemple est basé sur une couche limite tridimensionnelle où $\mathbf{u} = 0$ à $z = 0$, ce qui permet de poser que pour une approximation du premier ordre :

$$\begin{aligned} u &= z(a_1x + b_1y + c_1z), \\ v &= z(a_2x + b_2y + c_2z), \\ w &= z(a_3x + b_3y + c_3z). \end{aligned} \tag{B.1}$$

En introduisant ces approximations linéaires dans l'équation de la continuité, il est possible d'obtenir une première relation entre trois constantes de la matrice \mathbf{F} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ (a_1z) + (b_2z) + (a_3x + b_3y + 2c_3z) &= 0 \end{aligned}$$

Puisque les termes en x , y et z doivent tous s'annuler, on peut récrire le système pour chacune des coordonnées,

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ a_1 + b_2 + 2c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ce qui permet de déterminer que a_3 et b_3 sont nulles, et que

$$c_3 = -\frac{1}{2}(a_1 + b_2).$$

Ensuite, en utilisant la composante x de l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ f(x, y, z) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu (2c_1) \end{aligned}$$

En introduisant (B.1) dans le membre de gauche de \mathbf{F} , il vient que c_1 est fonction du gradient

de pression qui au premier ordre est constant.

$$c_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\nu}.$$

On détermine ensuite l'expression de c_2 de la même façon à l'aide de la composante y de l'équation de Navier-Stokes, soit

$$c_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2\nu}.$$

Les autres coefficients sont exprimés en fonction de termes mesurables à la paroi, soit des frottements pariétaux. En définissant les composantes du vecteur de vorticité $\boldsymbol{\omega} = (\xi, \eta, \zeta)$, on peut déterminer une expression pour les constantes a_1 , b_1 , a_2 et b_2 en y introduisant les expressions linéaires des composantes du champ de vitesse (B.1), soit :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = -a_2 x - b_2 y - 2c_2 z, \\ \eta &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = a_1 x + b_1 y + 2c_1 z, \\ \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = a_2 z - b_1 z\end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir les constantes

$$\begin{aligned}a_1 &= \eta_x & b_1 &= \eta_y \\ a_2 &= -\xi_x & b_2 &= -\xi_y.\end{aligned}$$

Ces constantes permettent finalement de présenter la relation entre l'espace réel et l'espace du plan de phase en fonction des pressions et des composantes du cisaillement pariétal :

$$\begin{aligned}x' &= \eta_x x + \eta_y y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2\nu} z, \\ y' &= -\xi_x x - \xi_y y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{2\nu} z, \\ z' &= \frac{1}{2} (\xi_y - \eta_x) z.\end{aligned}\tag{B.2}$$

Cette forme est utilis e au chapitre 2 afin de déterminer par la méthode du plan de phase, les conditions nécessaires au décollement pour un écoulement bidimensionnel stationnaire.

ANNEXE C FORMULATIONS FAIBLES

La formulation faible de la matrice \mathbf{A} de l'équation tridimensionnelle de Navier-Stokes, utilisée lors de la résolution numérique par la méthode des éléments finis, est :

$$\begin{aligned}
 u : & \int_{\Omega} \varphi_x \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_x \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 v : & \int_{\Omega} \varphi_y \rho \frac{\partial v}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_y \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial \varphi_y}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 w : & \int_{\Omega} \varphi_z \rho \frac{\partial w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \varphi_z \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} d\Omega + \\
 & \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial \varphi_z}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial \varphi_z}{\partial z} \\
 p : & -q \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

avec le tenseur des forces visqueuses :

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

ANNEXE D ÉCOULEMENT RAMPANT AUTOUR D'UN CYLINDRE EN ROTATION

Klonowska-Prosnak et Prosnak (2001) ont fourni une solution analytique afin de décrire l'écoulement rampant autour d'un cylindre en rotation près d'une plaque infinie se déplaçant à vitesse constante. Un écoulement similaire a aussi été résolu par Hackborn *et al.* (1997) où dans ce dernier cas, le cylindre est confiné entre deux plaques infinies. Bien qu'une solution analytique existe, un des termes de l'équation de courant est basé sur le résultat d'une intégrale avec une borne supérieure infinie, ce qui nécessite l'utilisation d'une procédure numérique et d'importants temps de calcul. C'est pour cette raison que la solution de Klonowska-Prosnak et Prosnak (2001) a été sélectionnée.

La solution initialement donnée par les auteurs considère que la paroi est située à une ordonnée strictement positive. La solution a été simplifiée ici et extrapolée en fixant la paroi en $y = 0$. Si u et v sont les composantes de la vitesse dans les directions axiale et transverse, alors la solution est exprimée à l'aide de la fonction complexe suivante (où $i = \sqrt{-1}$) :

$$\begin{aligned} u(z) - iv(z) = & -\frac{U_w}{2\log(a)} \left[2\log\left(\frac{|\zeta|}{a}\right) + \frac{\mu}{2\zeta}(z^* - z)(\zeta - i)^2 \right] \\ & + \sigma(\zeta - i)^2 \left[\frac{i\mu z^*}{2} \left(\frac{a}{\zeta^2} + \frac{1}{a} \right) - \frac{i}{\zeta} \left(a + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{2a} \left(\frac{a^2}{\zeta^2} - 1 \right) \right] \\ & + \sigma \left[a + \frac{1}{a} + i \left(\frac{a}{\zeta^*} - \frac{\zeta^*}{a} \right) \right], \end{aligned} \quad (D.1)$$

avec

$$z = x + iy, \quad \zeta = \zeta(z) = \frac{1 + i\mu z}{i + \mu z}, \quad (D.2)$$

où les complexes conjugués sont représentés par des étoiles. Les constantes a , μ et σ dans (D.1) sont obtenues de la géométrie et de la cinématique du cylindre :

$$a = \frac{R + y_c - \sqrt{y_c^2 - R^2}}{R + y_c + \sqrt{y_c^2 - R^2}},$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{y_c^2 - R^2}},$$

$$\sigma = \frac{a}{a^2 - 1} \left(-\frac{U_w}{2 \log a} + \frac{2\Omega a^2}{\mu(a^2 - 1)^2} \right),$$

où U_w est la vitesse à la paroi, R est le rayon du cylindre initialement centré à $(0, y_c)$ et tournant à une vitesse angulaire Ω . Puisque nous considérons toujours que la paroi est fixe, le repère de référence est celui qui se déplace avec celle-ci. En utilisant $x - U_w t$ au lieu de x pour la coordonnée axiale et $u - U_w$ au lieu de u dans (D.1), on obtient l'écoulement pour un cylindre se déplaçant à une vitesse de convection $U_c = U_0 = -U_w$. De plus, si on impose une oscillation au mouvement du cylindre, on utilise le principe de superposition des équations puisque (D.1) est solution de l'équation de Stokes (équation linéaire). Pour obtenir cette formulation, on ajoute à (D.1), le champ de vitesse d'un écoulement uniforme, le terme d'oscillation temporel $-\beta \cos(\omega t)$. Dans le repère se translatant avec la paroi, le champ de vitesse reste inchangé et seul un changement de coordonnées est nécessaire, *c.-à-d.* $x - U_w t + \beta \sin(\omega t)/\omega$ est utilisée au lieu de x , ce qui décrit l'écoulement se développant près d'une paroi fixe autour d'un cylindre en mouvement à une vitesse $U_c = U_0 + \beta \cos(\omega t)$.